Scuola Superiore Meridionale
Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2021–2022

Prova di Fisica

(Corsi di Laurea in Matematica, Fisica e Ingegneria)
8 Settembre 2021

Non è consentito l'uso o la consultazione di alcun libro, documento, calcolatrice, cellulare né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare la firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
L'aula della prova potrà essere abbandonata solo dopo un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1. Un piano è inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale verso il basso. Un proiettile è sparato con velocità v a un angolo θ sopra l'orizzontale come mostrato in Figura 1. Qual è la distanza d lungo il piano inclinato, dal punto di lancio, percorsa dal proiettile? Per quale angolo θ is ottiene la distanza massima?

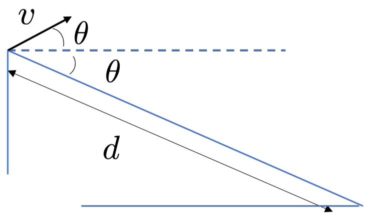


FIGURA 1

Problema 2. Un ragazzo che pratica bungee jumping si lascia cadere verticalmente con velocità iniziale nulla da un ponte attaccato a una corda elastica di cui una estremità è fissata al ponte. Sotto al ponte c'è un lago. Sapendo che il ragazzo non arriverà a toccare l'acqua, data m la sua massa, L la lunghezza a riposo dell'elastico e k la sua costante elastica si calcoli:

- la distanza verticale percorsa dal ragazzo prima di raggiungere una velocità nulla per effetto della forza di richiamo elastica e il tempo impiegato a percorrerla.
- La velocità massima raggiunta durante la caduta.

Problema 3. Si studi il sistema fisico in Figura 2. Si assumano le masse m_1 e m_2 puntiformi e fissate alla leva di massa trascurabile. Le estremità della leva con fulcro O sono connesse con due molle di costante elastica k_1 e k_2 e lunghezza a riposo nulla. Il sistema è immerso nel campo gravitazionale terrestre.

- Trovare, se esiste, l'angolo θ di equilibrio nel caso semplificato in cui $l_1 = l_2 = h$.
- Si studi il caso generale con l_1, l_2 e h generici.

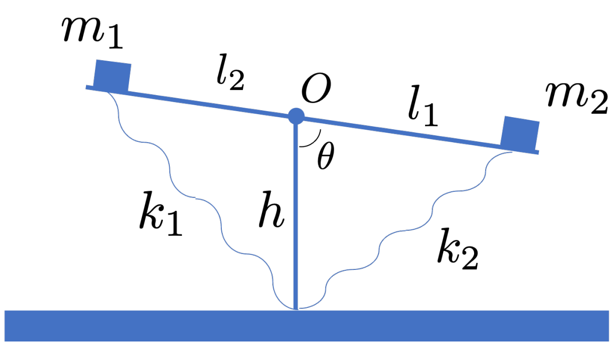


FIGURA 2

Problema 4. Un circuito a forma di tetraedro è composto di resistenze identiche di $1\,\Omega$ su ogni lato come in Figura 3. Qual è la resistenza che si misurerebbe tra i due punti A e B sul circuito? Come cambia la resistenza misurata se sostituiamo la resistenza posta sul lato AB con una resistenza di $2\,\Omega$?

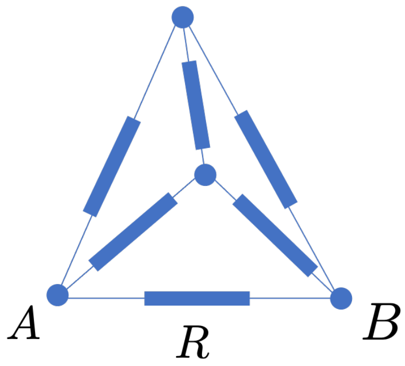


FIGURA 3

Problema 5. Due cariche positive di carica q_1 e q_2 sono poste a distanza L l'una dall'altra nel vuoto. È possibile posizionare una terza carica Q in modo tale che il sistema sia all'equilibrio? Dimostrare che non è possibile oppure trovare il valore di Q e la posizione in cui deve essere posta.

Problema 6. Si consideri una bacinella piena d'acqua con un buco circolare di raggio r sul fondo. Il buco è tappato da un tappo di forma conica, con base di raggio R e altezza H. Il tappo è composto di un materiale con densità relativa rispetto all'acqua $\rho < 1$.
Il tappo però non aderisce perfettamente con il bordo del buco, lasciando scorrere lentamente un po' d'acqua e facendone lentamente abbassare il livello:

(1) Mostrare che se h è sufficientemente grande il tappo rimarrà sul fondo della bacinella per qualunque valore di $\rho \in (0, 1)$.
(2) Si determini se raggiunto un certo livello h dell'acqua il tappo inizierà a sollevarsi.
(3) È vero o no che se il tappo inizierà a solleversi questo accadrà quando è ancora completamente sommerso?

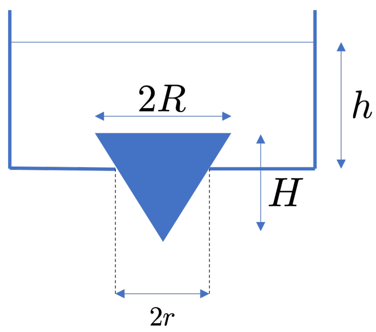


FIGURA 4

Soluzioni

Problema 1.
È sufficiente considerare l'intersezione tra la retta che descrive il piano inclunato e la traiettoria del proiettile. Ponendo l'origine del sistema di riferimento nel punto in cui viene lanciato il proiettile abbiamo per il proiettile

$$y(t) = v \sin\theta \ t - \frac{1}{2} g t^2 \,, \tag{1}$$

$$x(t) = v \cos\theta \ t \,, \tag{2}$$

e per il piano

$$y = -\tan\theta \ x \,. \tag{3}$$

Eliminando il tempo e risolvendo il sistema otteniamo la soluzione

$$(x, y) = \left(\frac{4v^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{g}, -\frac{4v^2 \sin^2(\theta)}{g} \right) \,, \tag{4}$$

da cui

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4v^2 \sin(\theta)}{g} \,. \tag{5}$$

Il valore massimo di d si ottiene per $\theta = \pi/2$ che però è un caso limite in cui il proiettile tocca il piano nel punto da cui è partito e $d = 0$. Il massimo pertanto non è realizzato per nessun dato angolo $\theta \in (0, \pi/2]$. Il problema diventa più realistico se il proiettile ha una dimensione finita. In questo caso l'angolo per cui si ottiene la distanza massima esiste. Si lasciano i dettagli ai lettori interessati.

Problema 2.
Per calcolare la distanza verticale percorsa è sufficiente usare la conservazione dell'energia:

$$mgh = \frac{1}{2} k (h - L)^2 \,. \tag{6}$$

Risolvendo l'equazione e considerando solo la soluzione $h > 0$ abbiamo:

$$h = L + \frac{gm}{k} + \frac{gm}{k} \sqrt{1 + \frac{2kL}{gm}} \,. \tag{7}$$

Per calcolare il tempo di percorrenza va osservato che il moto si compone di due componenti. Prima un moto uniformemente accelerato fino a percorrere la distanza verticale L e poi un moto armonico. Detto $T = T_1 + T_2$, si ha subito $T_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$. Per quanto riguarda il moto armonico abbiamo che il secondo principio di Newton ci da un'accelerazione *verso il basso*

$$a = g - \frac{k}{m}(h - L) \,, \qquad h > L \,. \tag{8}$$

Il termine costante produce semplicemente uno spostamento del punto di equilibrio. Il moto armonico è pertanto descritto da:

$$h(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + L + \frac{gm}{k} \,, \tag{9}$$

$$v(t) = -\omega \, c_1 \sin(\omega t) + \omega \, c_2 \cos(\omega t) \,, \tag{10}$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Ponendo $t = 0$ quando nel momento in cui la molla inizia a tendersi possiamo imporre che $h(0) = L$ e che $v(0) = \sqrt{2Lg}$. Questo permette di determinare i coefficienti c_1 e c_2 come

$$c_1 = -\frac{gm}{k}\,, \qquad c_2 = \sqrt{\frac{2Lgm}{k}}\,. \tag{11}$$

A questo punto possiamo determinare T_2 risolvendo l'equazione:

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\, g\sin(\omega T_2) + \sqrt{2Lg}\cos(\omega T_2) = 0\,, \tag{12}$$

da cui

$$\tan \omega T_2 = -\sqrt{\frac{2Lk}{mg}} \rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{m}{k}}\left[-\arctan\sqrt{\frac{2Lk}{mg}} + \pi\right]\,, \tag{13}$$

dove abbiamo scelto la prima soluzione $T_2 > 0$. Combinando i risultati otteniamo la soluzione

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}}\left[\arctan\sqrt{\frac{2Lk}{mg}} - \pi\right]\,. \tag{14}$$

Per quanto riguarda l'ultimo punto la velocità massima raggiunta si ottiene quando la forza elastica bilancia completamente la forza peso e pertanto subito dopo la forza totale cambia segno e frena la caduta, ossia

$$h(t) = \frac{gm}{k} + L\,. \tag{15}$$

Da qui possiamo trovare la relazione:

$$\tan(\omega t) = \sqrt{\frac{gm}{2kL}} \tag{16}$$

da cui sostituendo seni e coseni in (10) si ottiene

$$v_{\max} = \sqrt{2Lg}\sqrt{1 + \frac{gm}{2kL}}\,. \tag{17}$$

Problema 3.

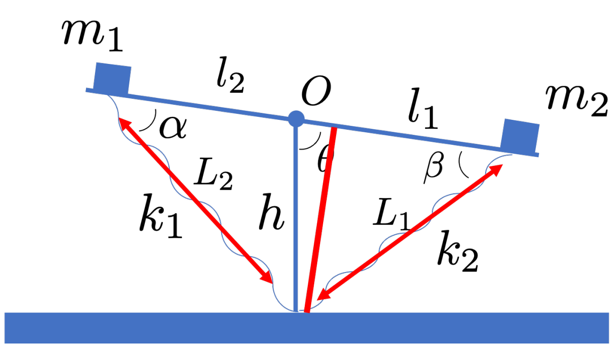


FIGURA 5

Risolviamo direttamente il caso generale. Per trovare la posizione di equilibrio, se esiste, dobbiamo studiare il momento delle forze che agiscono sulla leva e imporre che sia nullo. Con riferimento alla figura 5 abbiamo da semplici considerazioni geometriche:

$$L_1 = \sqrt{h^2 - 2hl_1\cos\theta + l_1^2}\,, \tag{18}$$

$$L_2 = \sqrt{h^2 - 2hl_2\cos\theta + l_2^2}\,. \tag{19}$$

Per calcolare i momenti delle forze elastiche dobbiamo calcolare inoltre

$$\sin\beta = \frac{h\sin\theta}{\sqrt{h^2 - 2hl_1\cos\theta + l_1^2}}\,, \tag{20}$$

$$\sin\alpha = \frac{h\sin\theta}{\sqrt{h^2 - 2hl_2\cos\theta + l_2^2}}\,. \tag{21}$$

La condizione di momento totale $\sum_i r_i \times F_i = 0$ nullo diventa allora

$$(m_1 g\sin\theta + L_2 k_1 \sin\alpha)l_2 = (m_2 g\sin\theta + L_1 k_2\sin\beta)l_1\,, \tag{22}$$

che semplificando diventa

$$l_2\sin\theta(gm_1 + hk_1) = l_1\sin\theta(gm_2 + hk_2)\,, \tag{23}$$

Tale equazione ammette come soluzioni $\theta = 0, \pi$ e

$$\theta \in (0,\pi)\,, \tag{24}$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{hk_2 + gm_2}{hk_1 + gm_1}\,. \tag{25}$$

In quest'ultimo caso ogni angolo θ è un angolo di equilibrio se vale una relazione (25) e non solo $\theta = 0, \pi$. Il caso $l_1 = l_2 = h$ è simile (calcoli più semplici) e la relazione (25) semplifica in

$$\frac{hk_2 + gm_2}{hk_1 + gm_1} = 1\,. \tag{26}$$

Problema 4.

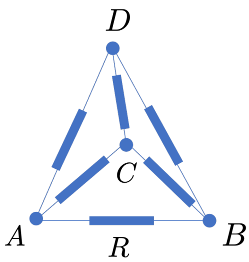


FIGURA 6

Con riferimento alla figura 6 possiamo subito affermare che i punti C e D sono allo stesso potenziale. Ne segue che il circuito è equivalente al circuito in figura 7. A questo punto è banale calcolare la resistenza equivalente usando le leggi di Kirchhoff ottenendo $R_{\text{eq}} = \frac{1}{2}\ \Omega$.

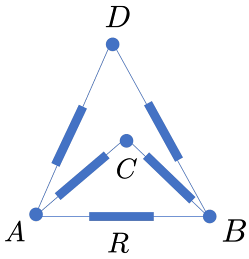


FIGURA 7

Nel caso in cui la resistenza tra A e B è sostituita con una resistenza di 2 Ω la resistenza misurata ai capi AB risulterà $R_{\text{eq}} = \frac{2}{3}\ \Omega$.

Problema 5.
È ovvio che la carica Q ha qualche chance di rendere il sistema stabile solo se posta sulla congiungente tra q_1 e q_2. Inoltre è facile concludere che la carica Q va posta all'interno del segmento delimitato dalle cariche q_1 e q_2 e non all'esterno. Supponiamo infatti per assurdo che la carica Q sia posta in modo tale che la carica q_1 separi la carica Q e la carica q_2. in questo caso la carica q_1 subisce due forze concordi che pertanto non possono mai annullarsi. Questo dimostra che la carica Q deve separare le due carice q_1 e q_2 e deve essere di segno discorde.
Con la premessa di cui sopra la stabilità del sistema equivale all'annullarsi delle tre forze agenti su ogni carica. Se poniamo senza perdita di generalità la carica q_1 nell'origine e la carica q_2 a distanza L sull'asse delle x possiamo scrivere:

$$\frac{Qq_1}{x^2} - \frac{q_1 q_2}{L^2} = 0\,, \tag{27}$$

$$\frac{q_1 q_2}{L^2} - \frac{Qq_2}{(L-x)^2} = 0\,, \tag{28}$$

$$\frac{Qq_2}{(L-x)^2} - \frac{Qq_1}{x^2} = 0\,. \tag{29}$$

Queste sono tre equazioni in due incognite che hanno un'unica soluzione accettabile (all'interno del segmeento $x \in (0, L)$:

$$x = \frac{L\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}\,, \qquad Q = \frac{q_1 q_2}{\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^2}\,. \tag{30}$$

Problema 6.

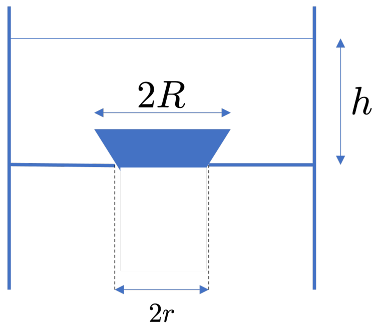


FIGURA 8

Si confronti il caso in esame con il caso in cui al di sotto del tappo c'è acqua fig. 8 e il tappo è formato solo dal tronco di cono al di sopra del foro. Nel caso in cui il tappo sia completamente circondato d'acqua la forza che agisce sul tappo è data dalla risultante della forza di Archimede e della forza peso. Nel nostro caso però sulla faccia che è appoggiata al buco non aggisce la pressione dell'acqua sottostante e pertanto dobbiamo sottrarre alla forza di Archimede la forza sul tappo prodotta dall'acqua che sarebbe al di sotto del tappo. Abbiamo pertanto che

$$F = -mg + g\rho_{acqua} V_i - \rho_{acqua} g h S_i \tag{31}$$

dove $V_i = \frac{\pi H \left(R^3 - r^3\right)}{3R}$ è il volume di tappo immerso, $S_i = \pi r^2$ è la superfice del foro che non è in contatto con l'acqua, $m = \rho\, \rho_{acqua} \frac{1}{3}\pi H R^2$ è la massa del tappo e abbiamo usato nell'ultimo termine la legge di Stevino per calcolare la forza che l'acqua al di sotto del tappo produrrebbe sul tappo stesso.
Si vede pertanto che esiste un contributo negativo verso il basso alla forza lineare in h che pertanto spingerà il tappo verso il basso per qualunque valore della densità relativa $\rho < 1$ (se h è sufficientemente grande).
Il tappo inizierà ad alzarsi solo quando $F = 0$, ossia per

$$h = \frac{H\left((1-\rho)R^3 - r^3\right)}{3r^2 R}\,. \tag{32}$$

Si noti che il tappo si alzerà in questo caso solo se $h > 0$ che implica:

$$\rho \leq 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\,. \tag{33}$$

Se tale condizione non è soddisfatta il livello dell'acqua può scendere al di sotto del tappo. Per determinare se il tappo potrà alzarsi in questo caso dobbiamo tenere in considerazione che la spinta di archimede sarà data solo dal volume immerso fig. 9:

$$V_i = \frac{\pi R^2 \left(h + \frac{Hr}{R}\right)^3}{3H^2} - \frac{\pi H r^3}{3R}\,. \tag{34}$$

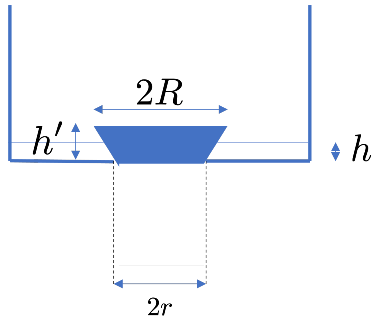


Figura 9

Detto questo si conclude facilmente che se il tappo non si alza quando l'acqua arriva al livello della sua base non si alzerà mai visto che la derivata della forza rispetto a h in questo caso è

$$\frac{dF}{dh} = \frac{\pi h R(hR + 2Hr)}{H^2} > 0\,. \tag{35}$$

Pertanto la forza verso l'alto puó solo decrescere rispetto al valore massimo che si ottiene per $h = h'$.

Scuola Superiore Meridionale
Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2021–2022

Prova di Matematica

(Corsi di Laurea in Fisica e Ingegneria e Matematica)

7 Settembre 2021

Non è consentita la consultazione di alcun libro o documento, né l'uso di alcun dispositivo, come per esempio, calcolatrici, cellulari né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare la firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
La prova potrà essere consegnata solo dopo almeno un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1. Gli spigoli di un tetraedro sono numerati da 1 a 6. Ad ogni vertice si associa la somma dei numeri sui tre spigoli che vi concorrono. Si dimostri che i numeri sui vertici non possono essere tutti uguali.

Problema 2. Si dimostri che non esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che $p(1) = 0$ e $p(3) = 3$.

Problema 3. Un triangolo ABC ha i lati che misurano 3, 4 e 5. Si formi un secondo triangolo $A'B'C'$ i cui lati hanno le stesse misure delle mediane del primo triangolo. Si calcoli l'area del secondo triangolo.
Si dimostri che l'area di $A'B'C'$ è sempre tre quarti dell'area di ABC, qualunque siano le lunghezze dei suoi lati.

Problema 4. Un dado ha 6 facce. Su una c'è scritto "HAI VINTO", su due "RITIRA", sulle altre tre "PASSA IL DADO". Si gioca in due.
Qual è la probabilità che il primo giocatore vinca entro tre tiri (in generale, indipendentemente da chi li esegue nella partita)?

Problema 5. Si trovino tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 6. Si mostri che l'equazione

$$n(n + 1) = 4m(m + 1)$$

non ha soluzioni in interi positivi n, m.

Scuola Superiore Meridionale
Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2021–2022

Prova di Matematica – Soluzioni

Problema 1. Gli spigoli di un tetraedro sono numerati da 1 a 6. Ad ogni vertice si associa la somma dei numeri sui tre spigoli che vi concorrono. Si dimostri che i numeri sui vertici non possono essere tutti uguali.

Soluzione. Ogni spigolo contribuisce alla somma dei due suoi vertici adiacenti. Dunque la somma totale dei numeri associati ai vertici è due volte la somma di tutti i numeri sugli spigoli, che è la somma da 1 a 6, dunque 21. La somma totale di cui sopra è allora 42, ma essendo 4 i vertici e 42 non divisibile per 4, i numeri sui vertici non possono essere tutti uguali. tutti uguali.

Problema 2. Si dimostri che non esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che $p(1) = 0$ e $p(3) = 3$.

Soluzione. Supponiamo esista tale polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

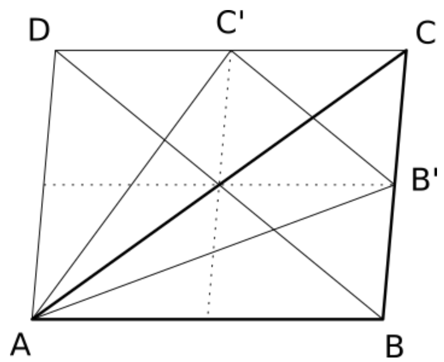
con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Se $p(1) = 0$ e $p(3) = 3$, si ha

$$3 = p(3) - p(1) = a_n(3^n - 1) + a_{n-1}(3^{n-1} - 1) + \cdots + a_1(3 - 1)$$

ma tutti i numeri $3^k - 1$ sono pari, per $k = 1, \ldots, n$, dunque $p(3) - p(1)$ è pari, quindi non può essere uguale a 3, da cui la contraddizione.

Problema 3. Un triangolo ABC ha i lati che misurano 3, 4 e 5. Si formi un secondo triangolo $A'B'C'$ i cui lati hanno le stesse misure delle mediane del primo triangolo. Si calcoli l'area del secondo triangolo.
Si dimostri che l'area di $A'B'C'$ è sempre tre quarti dell'area di ABC, qualunque siano le lunghezze dei suoi lati.

Soluzione. Dimostriamo prima il secondo punto. A partire da un generico triangolo ABC costruiamo il parallelogramma $ABCD$ come nella figura seguente.



Individuati B' e C' rispettivamente punti medi dei segmenti BC e CD, si vede allora facilmente che il triangolo $AB'C'$ ha i lati di lunghezza uguale alle mediane del triangolo ABC. L'area di tale triangolo si ottiene sottraendo dall'area del parallelogramma $ABCD$, che è doppia dell'area di ABC, le aree dei triangoli BCC', ABB' e ADC'. Essendo l'area di BCC' uguale a $\frac{1}{8}Area(ABCD) = \frac{1}{4}Area(ABC)$ e le aree di ABB' e ADC' uguali a $\frac{1}{2}Area(ABC)$, concludiamo

$$\begin{aligned} Area(AB'C') &= Area(ABCD) - Area(BCC') - Area(ABB') - Area(ADC') \\ &= 2Area(ABC) - \frac{1}{4}Area(ABC) - \frac{1}{2}Area(ABC) - \frac{1}{2}Area(ABC) \\ &= \frac{3}{4}Area(ABC) \end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare.
Segue dunque immediatamente che la risposta al primo punto è 9/2.

Problema 4. Un dado ha 6 facce. Su una c'è scritto "HAI VINTO", su due "RITIRA", sulle altre tre "PASSA IL DADO". Si gioca in due.
Qual è la probabilità che il primo giocatore vinca entro tre tiri (in generale, indipendentemente da chi li esegue nella partita)?

Soluzione. Il primo giocatore vince, con probabilità $1/6$ se al primo tiro esce "HAI VINTO", oppure, se dopo aver ottenuto "RITIRA", con probabilità $1/3$, esce "HAI VINTO", sequenza quindi con probabilità $1/3 \cdot 1/6$, oppure se riottiene "RITIRA" e poi vince, con probabilità $1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/6$. Infine, vince anche se esce al primo tiro "PASSA IL DADO", al secondo giocatore lo stesso "PASSA IL DADO" e di nuovo al primo "HAI VINTO", con probabilità $1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/6$.
La somma delle probabilità di tutte queste sequenze di al massimo tre tiri, vincenti per il primo giocatore è

$$1/6 + 1/3 \cdot 1/6 + 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/6 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/6 = 61/216$$

che è dunque la probabilità cercata.

Problema 5. Si trovino tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Ponendo $y = 0$ nell'equazione si ha

$$f(0)f(x) = f(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Notando che la funzione f identicamente nulla non soddisfa l'equazione, deve esistere $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\overline{x}) \neq 0$, dunque segue che $f(0) = 1$, dividendo per $f(\overline{x})$.
Ponendo $y = -x$ si ottiene

$$f(x)f(-x) = f(0) - x^2 = 1 - x^2$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $f(1)f(-1) = 0$ (scegliendo $x = 1$), cioè $f(1) = 0$ oppure $f(-1) = 0$.
Se $f(1) = 0$, ponendo $y = 1$ nell'equazione si ha

$$0 = f(x)f(1) = f(x+1) + x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e con la sostituzione $x = z - 1$, si conclude che $f(z) = 1 - z$, per ogni $z \in \mathbb{R}$, funzione che soddisfa l'equazione iniziale.
Se invece $f(-1) = 0$, ponendo $y = -1$ si ha

$$0 = f(x)f(-1) = f(x-1) - x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e con la sostituzione $x = z + 1$, si conclude che $f(z) = 1 + z$, per ogni $z \in \mathbb{R}$, altra funzione che anch'essa soddisfa l'equazione.
In conclusione, le uniche due funzioni cercate sono allora $f(x) = 1 + x$ e $f(x) = 1 - x$.

Problema 6. Si mostri che l'equazione

$$n(n+1) = 4m(m+1)$$

non ha soluzioni in interi positivi n, m.
Soluzione. Sommando 1 ad entrambi i membri dell'equazione, si ottiene

$$n^2 + n + 1 = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2 .$$

Notando che

$$n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

concludiamo che

$$n^2 < (2m+1)^2 < (n+1)^2$$

da cui deve valere

$$n < 2m + 1 < n + 1 .$$

Segue che n ed m non possono essere entrambi numeri naturali, in quanto tra n e $n+1$ non può esserci un numero naturale $2m+1$ (sono consecutivi).

SSM

Scuola Superiore Meridionale

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2022–2023

Prova di Fisica

(Corsi di Laurea in Fisica, Ingegneria e Matematica)

9 Settembre 2022

Non sono ammessi libri, calcolatrici, cellulari né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, il presente testo compreso, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare un nome, una firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
L'aula della prova potrà essere abbandonata solo dopo un'ora dall'inizio della stessa.

Problema 1. Una barca può viaggiare a una velocità massima v rispetto all'acqua. Si vuole usare questa barca per attraversare un fiume la cui corrente ha una velocità v_c (uniforme su tutto il fiume). Si determini in che direzione si deve dirigere l'imbarcazione per percorrere la minor distanza. C'è differenza tra i casi $v > v_c$ e $v < v_c$?

Problema 2.

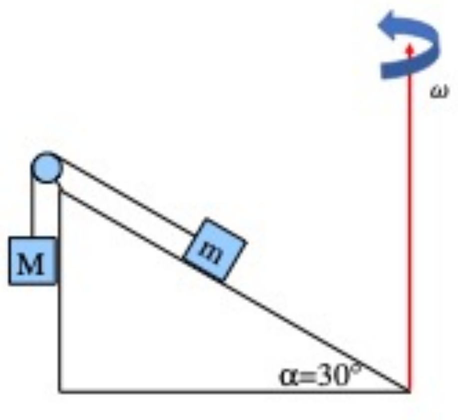


FIGURA 1

Le masse di figura 1 sono in equilibrio. Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ tra piano inclinato e massa m e la tensione T nella corda se $m = 100g$, $M = 50g$. Ripetere lo stesso calcolo nel caso in cui il piano inclinato ruoti intorno all'asse in figura con velocità angolare costante $\omega = 10 rad/s$. Si assuma per semplicità che la massa M non si può staccare dal piano inclinato.

Problema 3.
Si consideri una bicicletta di massa nulla schematizzata come in figura 2 costituita da un telaio e ruote di raggio r. Il ciclista, la cui massa è M, è seduto sul punto medio congiungente le due ruote a un'altezza h. A un certo punto il ciclista è costretto a frenare bruscamente cosicché nel momento in cui viene premuto il freno la ruota si blocca e striscia sul terreno. Assumendo un coefficiente d'attrito pari a μ, si determini la forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota anteriore e la forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota posteriore. Al variare di μ, c'è un valore massimo della forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota posteriore? Frenando con la ruota anteriore si determini se la ruota posteriore può perdere contatto con il terreno.

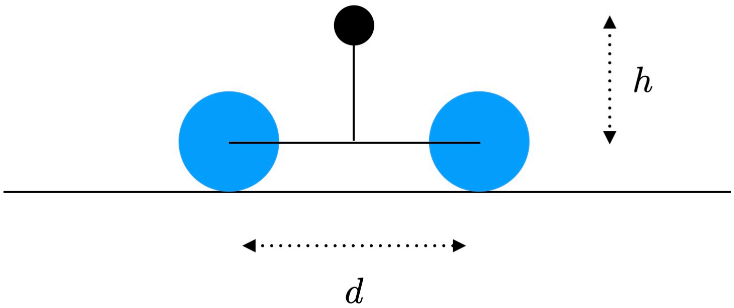


FIGURA 2

Problema 4.
Un'automobile è parcheggiata con una ruota su un marciapiede e le altre tre sulla strada. Assumendo che il marciapiede ha un'altezza h rispetto alla strada e che le sospensioni siano molle identiche di costante elastica k si determini lo spostamento dalla posizione di equilibrio di ognuna delle molle rispetto a quando l'automobile è parcheggiata sulla strada.

Problema 5.
Perché il cielo di notte è scuro? Si assuma che la densità di stelle nell'universo sia costante ρ e che ogni stella emetta in radiazione luminosa la stessa energia per unità di tempo P. Definendo l'intensità luminosa come l'energia misurata per unità di tempo e per unità di area si determini l'intensità luminosa misurata sulla terra (si trascuri l'intensità luminosa data dal sole). Il risultato dipende da ρ? Come cambierebbe il risultato se l'universo avesse un'età finita T? Assumendo che la densità di stelle sia dell'ordine di 10^{-3} stelle per anno luce cubico, che la potenza media di una stella sia dell'ordine di quella del sole $10^{26} W$ e che l'universo abbia un'età dell'ordine di 10 miliardi di anni si analizzi se l'assunzione di un'età finita dell'universo è sufficiente a spiegare perché la notte è buia.

Problema 6. Si consideri un recipiente cilindrico pieno d'acqua che ruota con velocità angolare ω rispetto al suo asse. Determinare la forma della superficie dell'acqua. [Suggerimento: lavorare nel riferimento rotante con il cilindro]

Scuola Superiore Meridionale

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2022–2023

Prova di Fisica – Soluzioni

Problema 1. Una barca può viaggiare a una velocità massima v rispetto all'acqua. Si vuole usare questa barca per attraversare un fiume la cui corrente ha una velocità v_c (uniforme su tutto il fiume). Si determini in che direzione si deve dirigere l'imbarcazione per percorrere la minor distanza. C'è differenza tra i casi $v > v_c$ e $v < v_c$?

Soluzione. Consideriamo prima il caso in cui $v > v_c$. In questo caso la traiettoria che percorre la distanza minima è quella per cui la barca si muove perpendicolarmente alla riva. Per fare ciò la barca deve essere diretta in una direzione tale per cui la componente della velocità parallela alle rive del fiume deve esattamente compensare la velocità della corrente:

$$\cos\alpha = \frac{v_c}{v}\,.$$

Se $v < v_c$ la barca non può muoversi perpendicolarmente alla riva. Il problema può essere risolto graficamente sommando la velocità della corrente a tutte le possibili velocità dell'imbarcazione formando un cerchio sulla punta del vettore velocità della corrente. Il cammino più breve si ottiene massimizzando l'angolo della velocità dell'imbarcazione con la direzione della corrente. Questo corrisponde a prendere la tangente con il cerchio in figura 1. La direzione in cui va diretta l'imbarcazione è data dall'angolo α per cui:

$$\cos\alpha = \frac{v}{v_c}\,.$$

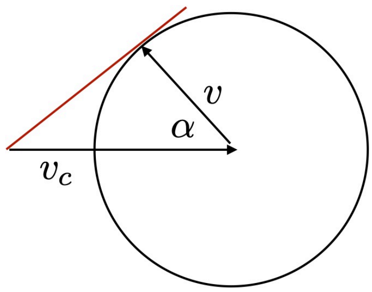


FIGURA 1

Problema 2.
Le masse di figura 2 sono in equilibrio. Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ tra piano inclinato e massa m e la tensione T nella corda se $m = 100g$, $M = 50g$. Ripetere lo stesso calcolo nel caso in cui il piano inclinato ruoti intorno all'asse in figura con velocità angolare costante $\omega = 10rad/s$. Si assuma per semplicità che la massa M non si può staccare dal piano inclinato.

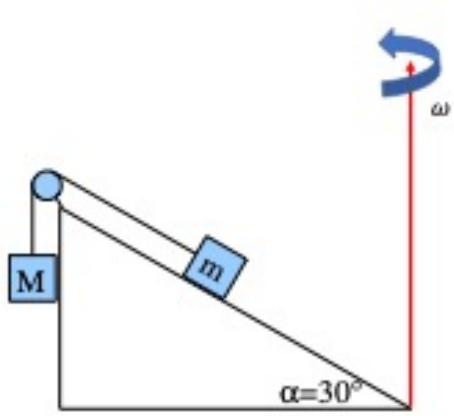


FIGURA 2

Soluzione. Scriviamo le equazioni della statica per entrambe le masse M e m, chiamando T la tensione del filo. Lungo l'asse y per la massa M abbiamo

$$T - Mg = 0.$$

Lungo il piano inclinato per la massa m abbiamo:

$$|T - mg\sin\alpha| \leq \mu mg\cos\alpha.$$

Il valore minimo di μ è allora:

$$\mu_{\min} = \frac{|\frac{M}{m} - \sin\alpha|}{\cos\alpha}.$$

Notare che il coefficiente di attrito minimo si annulla quando le masse sono in equilibrio statico.
Nel caso in cui il piano inclinato ruota dobbiamo aggiungere la forza centrifuga. L'equazione per la massa M è invariata. Per la massa m l'equazione viene modificata come:

$$|T - mg\sin\alpha + mg\omega^2 r\cos\alpha| \leq \mu(mg\cos\alpha + m\omega^2 r\sin\alpha).$$

dove r è la distanza della massa m dall'asse di rotazione. Il valore minimo del coefficiente d'attrito diventa:

$$\mu_{\min} = \frac{|\frac{M}{m} - \sin\alpha + \frac{\omega^2 r}{g}\cos\alpha|}{\cos\alpha + \frac{\omega^2 r}{g}\sin\alpha}$$

Problema 3.
Si consideri una bicicletta di massa nulla schematizzata come in figura 3 costituita da un telaio e ruote di raggio r. Il ciclista, la cui massa è M, è seduto sul punto medio congiungente le due ruote a un'altezza h. A un certo punto il ciclista è costretto a frenare bruscamente cosicché nel momento in cui viene premuto il freno la ruota si blocca e striscia sul terreno. Assumendo un coefficiente d'attrito pari a μ, si determini la forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota anteriore e la forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota posteriore. Al variare di μ, c'è un valore massimo della forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota posteriore? Frenando con la ruota anteriore si determini se la ruota posteriore può perdere contatto con il terreno.

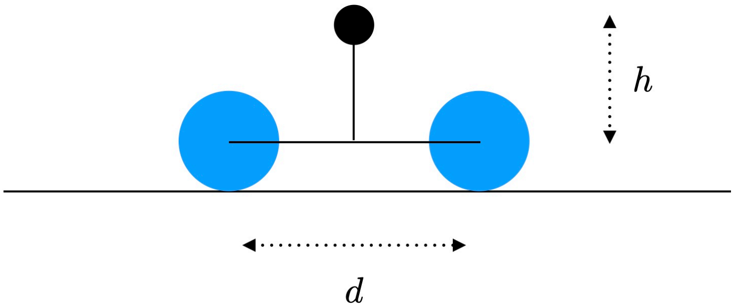


FIGURA 3

Soluzione. La somma dei momenti torcenti rispetto al centro di massa deve annullarsi. Siano F_1 e F_2 le reazioni vincolari della strada sulla ruota anteriore e posteriore rispettivamente. Queste allora banalmente soddisfano

$$F_1 + F_2 = Mg\,.$$

Imponendo che i momenti torcenti delle forze in gioco rispetto al centro di massa si annullino, se si frena con la ruota posteriore si ha

$$-F_1 d + F_2 d + \mu F_2 (h + r) = 0\,.$$

Risolvendo si ottiene la forza frenante:

$$F_a = \frac{dg\mu M}{2d + \mu(h + r)}\,.$$

Se μ tende all'infinito la forza frenante rimane finita $F_a \leq \frac{dgM}{h+r}$.
Se invece si frena con la ruota anteriore l'equazione da risolvere diventa:

$$-F_1 d + F_2 d + \mu F_1 (h + r) = 0\,.$$

Risolvendo otteniamo la forza frenante

$$F_a = \frac{dg\mu M}{2d - \mu(h + r)}\,.$$

Adesso la forza frenante non è più limitata. Attenzione però. L'espressione che abbiamo ricavato è valida se la ruota posteriore non si alza dal terreno per effetto della frenata. Questo accade se $F_2 = 0$ ossia

$$\frac{d}{2d - \mu(h + r)} = 1\,.$$

Segue che la forza frenante in questo caso è data da $F_a = \mu g M$ e non è limitata all'aumentare del coefficiente d'attrito μ, cosa che può essere ottenuta migliorando la qualità della gomma di cui è composta la ruota. Questo va confrontato con il caso in cui si frena con la ruota posteriore dove la forza massima frenante dipende solo dalla geometria della bicicletta e non dal coefficiente d'attrito.

Problema 4.
Un'automobile è parcheggiata con una ruota su un marciapiede e le altre tre sulla strada. Assumendo che il marciapiede ha un'altezza h rispetto alla strada e che le sospensioni siano

molle identiche di costante elastica k si determini lo spostamento dalla posizione di equilibrio di ognuna delle molle rispetto a quando l'automobile è parcheggiata sulla strada.

Soluzione. Misuriamo la compressione delle sospensioni rispetto alla posizione di equilibrio in cui tutte e quattro le ruote sono sulla strada. Il segno sarà positivo se la sospensione viene compressa maggiormente e negativo se la sospensione viene decompressa. All'equilibrio non ci possono essere momenti torcenti non-nulli rispetto a qualunque asse di rotazione. Prendendo come asse di rotazione dell'automobile una diagonale passante per due ruote possiamo concludere che le sospensioni delle due ruote rimanenti devono essere soggette a una compressione o decompressione identica. Se la ruota anteriore destra è sullo scalino allora la corrispondente sospensione sarà compressa di una quantità x. Per l'argomento appena descritto anche la sospensione posteriore sinistra dovrà essere compressa della stessa quantità. Ma questo significa che le sospensioni anteriore sinistra e posteriore destra si devono allungare della stessa quantità $-x$ affinché la somma di tutte le forze non cambi.
A questo punto l'automobile si alzerà rispetto al terreno di una quantità x in corrispondenza delle ruote anteriore sinistra e posteriore destra, mentre in corrispondenza della ruota posteriore sinistra l'automobile si abbasserà di x e sulla ruota anteriore destra l'automobile si alzerà di $h - x$, dove h è lo spessore dello scalino. Essendo la carrozzeria rigida possiamo calcolare di quanto si è alzato il punto centrale della carrozzeria in due modi che devono dare lo stesso risultato. Considerando la diagonale tra ruota anteriore sinistra e posteriore destra otteniamo che il punto medio si alza di x. Considerando invece la ruota anteriore destra e posteriore sinistra il punto centrale si alza di

$$\frac{(h-x)-x}{2}$$

Uguagliando queste due espressioni otteniamo

$$x = \frac{h}{4}$$

Si noti che il risultato non dipende dalla distribuzione dei pesi nell'automobile e pertanto è lo stesso anche se ci sono persone in auto.

Problema 5.
Perché il cielo di notte è scuro? Si assuma che la densità di stelle nell'universo sia costante ρ e che ogni stella emetta in radiazione luminosa la stessa energia per unità di tempo P. Definendo l'intensità luminosa come l'energia misurata per unità di tempo e per unità di area si determini l'intensità luminosa misurata sulla terra (si trascuri l'intensità luminosa data dal sole). Il risultato dipende da ρ? Come cambierebbe il risultato se l'universo avesse un'età finita T? Assumendo che la densità di stelle sia dell'ordine di 10^{-3} stelle per anno luce cubico, che la potenza media di una stella sia dell'ordine di quella del sole $10^{26}W$ e che l'universo abbia un'età dell'ordine di 10 miliardi di anni si analizzi se l'assunzione di un'età finita dell'universo è sufficiente a spiegare perché la notte è buia.

Soluzione. L'intensità luminosa di una stella a una distanza r diminuisce con il quadrato della distanza:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}\,,$$

dove abbiamo diviso per la superficie della sfera su cui è distribuita la potenza della stella a una distanza r. Considerando un riferimento in cui la terra è nel centro e dividendo l'universo

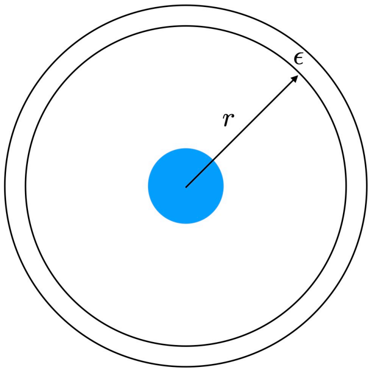


FIGURA 4

in sfere concentriche di spessore ϵ con centro sulla terra come in figura 4, il numero di stelle a una distanza r dalla terra sarà dato da

$$N = 4\pi r^2 \epsilon \rho$$

Ognuna di queste stelle produrrà un'intensità luminosa pari a $\frac{P}{4\pi r^2}$. L'intensità totale delle stelle a distanza r dalla terra sarà pertanto

$$I = P\epsilon\rho$$

e non dipende da r. Questo implica che sommando su tutti i cerchi concentrici otterremmo un'intensità di luce infinita in contraddizione con il senso comune per cui la notte è buia! Una possibile soluzione a questo problema è quella di assumere che l'universo abbia un'età finita T. In questo caso sulla terra arriverebbe la luce delle stelle al massimo a una distanza $r = Tc$ (con c la velocità della luce) e l'intensità luminosa di tutte le stelle visibili sarebbe:

$$I = P\rho Tc\,.$$

Assumendo che tutte le stelle in media abbiano la stessa potenza del sole pari a $3.906 \cdot 10^{26} W$ e che la densità di stelle sia pari a 10^{-3} stelle per anno luce cubico possiamo stimare la luminosità del cielo sulla terra come

$$I \sim N 10^{-9} W/m^2\,,$$

con N l'età dell'universo in anni. Se l'universo ha un'età dell'ordine di dieci miliardi di anni la notte dovrebbe avere un'intensità luminosa di

$$I = 10 W/m^2\,,$$

pari all'intensità luminosa di una lampadina da $100W$ a 1 m di distanza. Questo valore è però vari ordini di grandezza più alto rispetto a quello misurato. Pertanto un'età finita dell'universo non sembra, con i dati inseriti, sufficiente per spiegare perché la notte è buia!

Problema 6. Si consideri un recipiente cilindrico pieno d'acqua che ruota con velocità angolare ω rispetto al suo asse. Determinare la forma della superficie dell'acqua. [Suggerimento: lavorare nel riferimento rotante con il cilindro]

Soluzione. È conveniente usare il teorema di Bernoulli nel riferimento rotante in cui l'acqua è ferma. Infatti in questo riferimento il fluido è in quiete e possiamo usare il teorema di

Bernoulli lungo una qualunque linea che congiunge due punti arbitrari. Considerando che $v = 0$ nel riferimento rotante, il teorema di Bernoulli afferma che lungo tale linea

$$P(r, z) + \rho V(r, z) = cost$$

dove $V(r, z)$ è il potenziale a cui è soggetto l'elemento fluido con r la distanza dall'asse del cilindro, z l'altezza e P la pressione. Sulla superficie di separazione tra aria e liquido la pressione deve essere costante e uguale alla pressione atmosferica P_a. Il potenziale è invece dato dalla somma del potenziale gravitazionale e del potenziale centrifugo:

$$V(r, z) = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \, .$$

Si ottiene pertanto l'equazione della superficie formata dall'acqua:

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \, ,$$

che è una parabola. La costante z_0 si può determinare conoscendo il volume dell'acqua nel secchio.

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2022–2023

Prova di Matematica
(Corsi di Laurea in Fisica, Ingegneria e Matematica)
8 Settembre 2022

Non è consentita la consultazione di alcun libro o documento, né l'uso di alcun dispositivo, come per esempio, calcolatrici, cellulari, né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare un nome, una firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
La prova potrà essere consegnata solo dopo almeno un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1. Sia n un numero naturale dispari. Consideriamo una griglia quadrata fatta di n^2 quadratini unitari e coloriamo ogni lato dei quadratini di rosso o di blu. Se ci sono al massimo n^2 lati rossi in totale, si mostri che allora esiste sempre almeno un quadratino con almeno 3 lati blu.

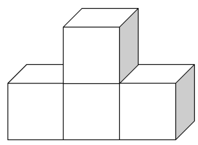
Problema 2. Siano A, B due punti di una parabola di fuoco F e sia S l'intersezione delle due tangenti alla parabola per tali punti. Si mostri che i triangoli ASF e BSF sono simili.

Problema 3. Una sequenza $a_1, a_2, \ldots$ di numeri reali positivi soddisfa

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

per ogni intero positivo k. Si provi che $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$, per ogni $n \geq 2$.

Problema 4. Quattro cubi identici vengono incollati in modo da far combaciare perfettamente le loro facce. Ad ogni passo si sceglie la faccia di un cubo e la si incolla a una faccia di un altro cubo. Se le facce da incollare vengono scelte in maniera equiprobabile, con quale probabilità si ottiene una struttura finale come nella figura a lato?



Problema 5. Si trovino, se ne esistono, tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f\left(f(x) + y\right) = 2x + f\left(f(y) - x\right)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 6. Si trovino, se ne esistono, tutti gli interi positivi a, b e numeri primi p tali che

$$a^3 - b^3 = 4p^2$$

Scuola Superiore Meridionale

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2022–2023

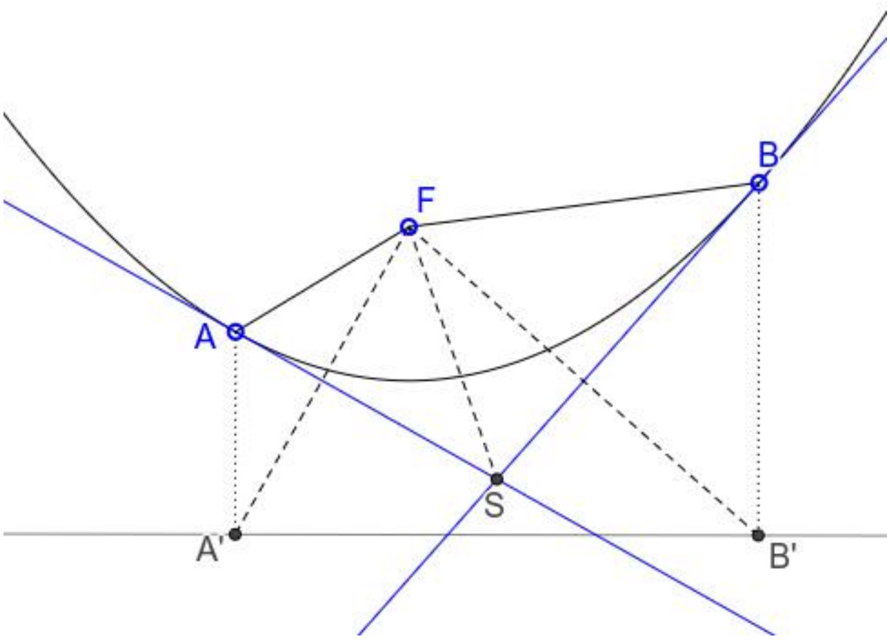
Prova di Matematica – Soluzioni

Problema 1. Sia n un numero naturale dispari. Consideriamo una griglia quadrata fatta di n^2 quadratini unitari e coloriamo ogni lato dei quadratini di rosso o di blu. Se ci sono al massimo n^2 lati rossi in totale, si mostri che allora esiste sempre almeno un quadratino con almeno 3 lati blu.

Soluzione. Colorando alternativamente i quadratini della griglia di bianco e nero, come una scacchiera, in modo che i 4 quadrati d'angolo siano neri, vediamo che si ottengono $(n^2+1)/2$ quadratini neri e $(n^2-1)/2$ bianchi. Se ognuno dei quadratini neri ha al massimo 2 lati blu, segue che ha almeno 2 lati rossi. Contando dunque tutti tali lati rossi, ne abbiamo almeno $2 \times (n^2+1)/2 = n^2+1$, in contraddizione con l'ipotesi che ci siano al massimo n^2 lati rossi in totale nella griglia.

Problema 2. Si considerino due punti A, B su una parabola di fuoco F e sia S l'intersezione delle due tangenti per tali punti. Si mostri che i triangoli ASF e BSF sono simili.

Soluzione. Tracciamo la direttrice della parabola e le proiezioni ortogonali A', B' su di essa dei punti A e B, come nella figura seguente, ricordando la proprietà che ogni punto della parabola ha la stessa distanza da direttrice e fuoco.



Per la proprietà di "riflessione" della parabola, che i raggi paralleli al suo asse si riflettono nel fuoco, si vede facilmente che la tangente in A è bisettrice dell'angolo $\widehat{FAA'}$ ed essendo $AF = AA'$, segue che è perpendicolare al segmento FA'. Da ciò otteniamo che $FS = SA'$ e ripetendo lo stesso argomento per il punto B, anche $FS = SB'$, cioè i punti F, A' e B' stanno su un cerchio di centro S.
L'angolo al centro $\widehat{FSA'}$ di tale cerchio è allora il doppio dell'angolo alla circonferenza $\widehat{FB'A'}$, dunque gli angoli $\widehat{FSA}$ e $\widehat{FB'A'}$ sono uguali. Poiché anche gli angoli $\widehat{FAS}$ e $\widehat{FA'B'}$ sono uguali, essendo complementari rispettivamente degli angoli uguali $\widehat{AFA'}$ e $\widehat{AA'F}$, segue che i triangoli ASF e $A'B'F$ sono simili.
Ripetendo lo stesso argomento, si ottiene che anche il triangolo BSF è simile a $A'B'F$, dunque la tesi è provata.

Segnaliamo che è possibile ottenere una soluzione del problema anche con i metodi della geometria analitica, rappresentando una generica parabola come il grafico nel piano cartesiano della funzione $y = ax^2$, per $a \in \mathbb{R}$. Scelti i punti A e B, si calcolano le coordinate degli altri vertici dei due triangoli ASF e BSF e si vede poi che sono simili.

Problema 3. Una sequenza $a_1, a_2, \ldots$ di numeri reali positivi soddisfa

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

per ogni intero positivo k. Si provi che $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$, per ogni $n \geq 2$.
Soluzione. Prendendo l'inverso della formula e moltiplicando entrambi i membri per k, otteniamo

$$\frac{k}{a_{k+1}} \leq \frac{a_k^2 + (k-1)}{a_k} = a_k + \frac{k-1}{a_k} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k} \leq a_k$$

dunque, sommando per k da 1 a n, si ottiene la disuguaglianza

$$\frac{n}{a_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k} \Big) \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$$

Dimostriamo ora la tesi per induzione con caso base $n = 2$, in cui si ha

$$a_1 + a_2 \geq a_1 + \frac{1}{a_1}$$

che è ben noto essere sempre maggiore o uguale di 2, qualunque sia $a_1 > 0$ (per esempio usando la disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica.
Se ora supponiamo che $S_n \geq n$, abbiamo due casi:

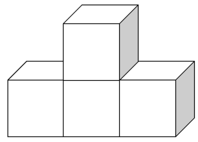
(1) se $a_{n+1} \geq 1$, ovviamente $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n + 1 \geq n + 1$ e la tesi è dimostrata.
(2) se $a_{n+1} < 1$, abbiamo, per la disuguaglianza di cui sopra,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq \frac{n}{a_{n+1}} + a_{n+1} = \frac{n-1}{a_{n+1}} + \Big(\frac{1}{a_{n+1}} + a_{n+1} \Big) > n - 1 + 2 = n + 1$$

essendo il termine tra le parentesi maggiore o uguale di 2, per lo stesso argomento del caso $n = 2$.

Avendo mostrato il passo induttivo, la tesi segue allora per ogni $n \geq 2$.

Problema 4. Quattro cubi identici vengono incollati in modo da far combaciare perfettamente le loro facce. Ad ogni passo si sceglie la faccia di un cubo e la si incolla a una faccia di un altro cubo. Se le facce da incollare vengono scelte in maniera equiprobabile, con quale probabilità si ottiene una struttura finale come nella figura a lato?



Soluzione. Dopo il primo passo si hanno ovviamente solo due cubi incollati, con 10 facce tra cui scegliere dove incollare il terzo cubo. Dunque, al secondo passo si hanno due possibilità per la struttura che si ottiene:

(1) una pila di tre cubi in linea, con probabilità $2/10$,
(2) una struttura ad angolo retto, con probabilità $8/10$.

In entrambi i casi, rimangono 14 facce disponibili su cui si può incollare il quarto cubo. All'ultimo passo, nel primo caso si otterrà la struttura della figura soltanto se si incolla il quarto cubo ad una faccia "centrale" della pila, cioè solo su 4 facce delle 14 disponibili, dunque con probabilità $4/14$. Nel secondo caso, si ottiene la struttura in figura se e solo se l'incollamento avviene su una delle due facce "esterne" del cubo centrale della struttura ad angolo, cioè con probabilità $2/14$.
Concludiamo quindi che la risposta alla domanda è allora $2/10 \times 4/14 + 8/10 \times 2/14 = 6/35$.

Problema 5. Si trovino, se ne esistono, tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f\left(f(x) + y\right) = 2x + f\left(f(y) - x\right)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
Soluzione. Ponendo $y = -f(x)$, si ha

$$f(0) = 2x + f(f(-f(x)) - x)) \qquad \text{dunque} \qquad f(0) - 2x = f(f(-f(x)) - x)$$

e notando che la funzione $f(0) - 2x$ è surgettiva, segue che anche f è surgettiva.
Esiste allora $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = 0$ e ponendo $x = c$, si ha

$$f(y) = 2c + f(f(y) - c)$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$. Poiché $f(y)$ può essere un qualunque numero reale r (sempre per la surgettività di f), concludiamo che $r = 2c + f(r - c)$, per ogni $r \in \mathbb{R}$, da cui $f(r - c) = r - 2c$. Ponendo infine $s = r - c$, abbiamo allora $f(s) = s - c$ per ogni numero reale s. Viceversa, si vede che tutte le funzioni di questo tipo, fissata una qualunque costante $c \in \mathbb{R}$, soddisfano l'equazione del problema. Sono dunque tutte e sole le soluzioni.

Problema 6. Si trovino, se ne esistono, tutti gli interi positivi a, b e numeri primi p tali che

$$a^3 - b^3 = 4p^2$$

Soluzione. Sia ha ovviamente

$$4p^2 = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

inoltre notiamo che a, b, che sono entrambi maggiori o uguali a 1, hanno la stessa parità, cioè sono o entrambi pari o entrambi dispari. Se fossero entrambi pari, si vede facilmente che $a^3 - b^3$ è divisibile per 8, dunque lo stesso vale per $4p^2$, da cui segue che $p = 2$. In tale caso $p = 2$, si ha allora $a^3 - b^3 = 16$, ma se a, b sono entrambi pari, si ha $b \geq 2$ e $a \geq 4$ e

ovviamente $a-b \geq 2$, dunque $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \geq 2 \times (16+8+4) = 56 \neq 16$, mentre se sono entrambi dispari, dalla fattorizzazione sopra segue che $a^3-b^3=16$ avrebbe un fattore dispari a^2+ab+b^2, il che è impossibile.
Vediamo dunque il caso p primo dispari, in cui chiaramente $4p^2$ non è divisibile per 8, dunque (per quanto detto sopra) a e b sono entrambi dispari, cioè $a=2k+1$ e $b=2h+1$, con $k>h$. Segue, sostituendo,

$$4p^2 = 2(k-h)(4k^2+4k+1+4hk+2h+2k+1+4h^2+4h+1) = 2(k-h)(4k^2+4h^2+4hk+6k+6h+3)$$

da cui si vede che, essendo l'ultimo fattore dispari, maggiore di 1 e p primo, abbiamo solo due casi possibili:

(1) $2(k-h)=4p$ e $4k^2+4h^2+4hk+6k+6h+3=p$
(2) $2(k-h)=4$ e $4k^2+4h^2+4hk+6k+6h+3=p^2$

Il primo caso si esclude in quanto $4k^2+4h^2+6k+4hk+6h+3$, uguale a p, è chiaramente sempre maggiore di $2(k-h)$, uguale a $4p$, da cui si avrebbe un assurdo.
Nel secondo caso, deve essere $k-h=2$, cioè $k=h+2$, da cui sostituendo

$$p^2 = 12h^2+36h+31$$

che diviso per 4 da resto 3, ma non ci sono quadrati che divisi per 4 diano resto 3.
Concludiamo dunque che non ci sono soluzioni $a, b, p \in \mathbb{N}$ con p primo.

Scuola Superiore Meridionale
Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2023–2024

Prova di Fisica
(Corsi di Laurea in Matematica, Fisica e Ingegneria)
12 Settembre 2023

Non è consentito l'uso o la consultazione di alcun libro, documento, calcolatrice, cellulare né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare la firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
L'aula della prova potrà essere abbandonata solo dopo un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1.
Se si scavasse un pozzo che passi da parte a parte il pianeta Marte attraverso il centro del pianeta. Vi si lasci cadere un sasso con velocità iniziale nulla. Quale sarà il moto del sasso? Quanto tempo impiegherebbe il sasso ad attraversare il pianeta? (massa di Marte: $M_{marte} = 6,42 \times 10^2 3kg$; raggio di Marte $R_{marte} = 3397km$, Costante di gravitazione universale: $G = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$)

Problema 2. È noto che gli uragani sono formati da masse d'aria che si muovono in moto circolare. Assumendo che le masse d'aria abbiano una velocità angolare costante e siano gas ideali e privi di viscosità che si muovano di moto circolare uniforme si determini la pressione atmosferica come funzione della distanza dal centro dell'uragano.

Problema 3. Un veicolo sperimentale di massa M si muove tra due piani paralleli usando due rulli di raggio r rotanti a velocità angolare costante ω per muoversi. Un rullo è a contatto con il piano superiore e l'altro con il piano inferiore. Si assuma che in assenza di gravitá, la forza di contatto tra i due rulli e i piani sia costante e uguale a T. Il coefficiente d'attrito tra i rulli e i due piani è μ. Si determini il vettore velocità del veicolo se i rulli formano un angolo $\pi/2$ tra i loro assi. Come cambia la risposta se l'angolo tra i rulli è $\theta < \pi/2$? Come cambierebbe la risposta in presenza di gravità perpendicolare ai piani?

Problema 4. Un orologio di luce è formato da due specchi paralleli posti ad una distanza L. Una lancetta è collegata ai due specchi in modo tale che l'intervallo di tempo elementare misurato è quello che un raggio di luce emesso da una sorgente posta nel primo specchio impiega per andare e tornare dopo aver subito una riflessione sul secondo specchio.

Si considerino due orologi di luce uno posto su un treno in moto a velocità v e un'altro sulla banchina della stazione in quiete. Assumendo di trovarsi sulla banchina in quiete e di poter osservare entrambi gli orologi, si calcoli quanti intervalli di tempo elementari $\mathcal{N}'$ sono segnati dall'orologio sul treno quando l'orologio in banchina ne segna N. N.B. N' non deve essere un multiplo intero di N. Si discuta il risultato ottenuto.

Problema 5. Si discutano le analogie, differenze e interazioni tra luce e materia.

Problema 6. Si stimi la forza gravitazionale tra terra e luna e tra sole e luna, quale tra queste due è piú grande? In considerazione di questo si discuta perché le maree seguono il ciclo lunare e sono massime in corrispondenza di luna piena e nuova, rispetto alle maree in corrispondenza di un quarto e tre-quarti?
Si possono usare i seguenti dati:

$$
\begin{aligned}
M_{terra} &= 5.972 \times 10^{24} Kg \\
M_{sole} &= 1,9 \times 10^{30} Kg \\
M_{luna} &= 7.348 \times 10^{22} Kg \\
d_{terra-luna} &= 384400 km \\
d_{terra-luna} &= 150 \times 10^{6} Km \\
G &= 6,6710^{-11} Nm^2/kg^2
\end{aligned}
$$

Scuola Superiore Meridionale
Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2023–2024

Prova di Fisica
(Corsi di Laurea in Matematica, Fisica e Ingegneria)
12 Settembre 2023

Non è consentito l'uso o la consultazione di alcun libro, documento, calcolatrice, cellulare né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare la firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
L'aula della prova potrà essere abbandonata solo dopo un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1.
Se si scavasse un pozzo che passi da parte a parte il pianeta Marte attraverso il centro del pianeta. Vi si lasci cadere un sasso con velocità iniziale nulla. Quale sarà il moto del sasso? Quanto tempo impiegherebbe il sasso ad attraversare il pianeta? (massa di Marte: $M_{marte} = 6,42 \times 10^{23} kg$; raggio di Marte $R_{marte} = 3397 km$, Costante di gravitazione universale: $G = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$)

Problema 2. È noto che gli uragani sono formati da masse d'aria che si muovono in moto circolare. Assumendo che le masse d'aria abbiano una velocità angolare costante e siano gas ideali e privi di viscosità che si muovano di moto circolare uniforme si determini la pressione atmosferica come funzione della distanza dal centro dell'uragano.

Problema 3. Un veicolo sperimentale di massa M si muove tra due piani paralleli usando due rulli di raggio r rotanti a velocità angolare costante ω per muoversi. Un rullo è a contatto con il piano superiore e l'altro con il piano inferiore. Si assuma che in assenza di gravitá, la forza di contatto tra i due rulli e i piani sia costante e uguale a T. Il coefficiente d'attrito tra i rulli e i due piani è μ. Si determini il vettore velocità del veicolo se i rulli formano un angolo $\pi/2$ tra i loro assi. Come cambia la risposta se l'angolo tra i rulli è $\theta < \pi/2$? Come cambierebbe la risposta in presenza di gravità perpendicolare ai piani?

Problema 4. Un orologio di luce è formato da due specchi paralleli posti ad una distanza L. Una lancetta è collegata ai due specchi in modo tale che l'intervallo di tempo elementare misurato è quello che un raggio di luce emesso da una sorgente posta nel primo specchio impiega per andare e tornare dopo aver subito una riflessione sul secondo specchio.

Si considerino due orologi di luce uno posto su un treno in moto a velocità v e un'altro sulla banchina della stazione in quiete. Assumendo di trovarsi sulla banchina in quiete e di poter osservare entrambi gli orologi, si calcoli quanti intervalli di tempo elementari $\mathcal{N}'$ sono segnati dall'orologio sul treno quando l'orologio in banchina ne segna N. N.B. N' non deve essere un multiplo intero di N. Si discuta il risultato ottenuto.

Problema 5. Si discutano le analogie, differenze e interazioni tra luce e materia.

Problema 6. Si stimi la forza gravitazionale tra terra e luna e tra terra e sole, quale tra queste due è piú grande? In considerazione di questo si discuta perché le maree seguono il ciclo lunare e sono massime in corrispondenza di luna piena e nuova, rispetto alle maree in corrispondenza di un quarto e tre-quarti?
Si possono usare i seguenti dati:

$$\begin{aligned} M_{terra} &= 5.972 \times 10^{24} Kg \\ M_{sole} &= 1,9 \times 10^{30} Kg \\ M_{luna} &= 7.348 \times 10^{22} Kg \\ d_{terra-luna} &= 384400 km \\ d_{terra-sole} &= 150 \times 10^{6} Km \\ G &= 6,6710^{-11} Nm^2/kg^2 \end{aligned}$$

Soluzioni

Problema 1.
La forza di gravità all'interno di una sfera con densità uniforme si può ricavare tramite il teorema di Gauss usando la simmetria sferica. Ad ogni raggio $r < R$ il campo gravitazionale è prodotto dalla sola materia contenuta all'interno della sfera di raggio r:

$$\vec{F} = -G\frac{m}{r^2}\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \hat{r} = -G\frac{mM_{\text{marte}}}{R^3_{\text{marte}}}\vec{r} \tag{1}$$

Pertanto il moto è armonico con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3_{\text{marte}}}{GM_{\text{marte}}}}, \tag{2}$$

Per attraversare una volta il pianeta è sufficiente un semiperiodo pari a circa 50 minuti.

Problema 2.
In questo modello semplificato di uragano, le masse d'aria si muovono di moto circolare uniforme come un corpo rigido. Per supportare questo moto le forze di pressione devono sopperire alla forza centripeta che deve agire sul singolo cubetto d'aria.
L'accelerazione centripeta agente su un cubetto d'aria è data da $\vec{a} = (-\hat{r})\omega^2 r$. L'equazione delle forze per un cubetto d'aria circolare che sottende un angolo al centro $d\theta$, di spessore dr, posizionato a un raggio r (e di altezza h come mostrato in figura) è:

$$-h(r+dr)d\theta\, p(r+dr) + hrd\theta\, p(r) = \rho\frac{d\theta}{2}[(r+dr)^2 - r^2]h(-\omega^2 r)\,. \tag{3}$$

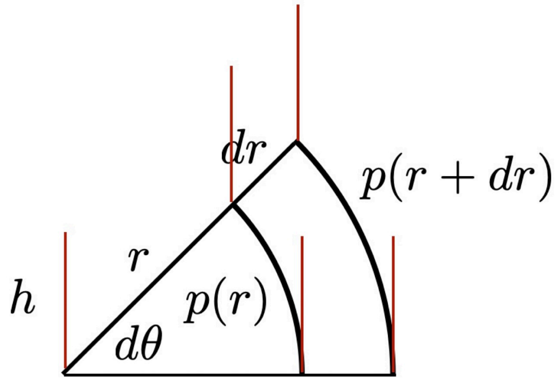


Figura 1

dove ρ è la densità dell'aria. Espandendo al primo ordine in dr e semplificando otteniamo la seguente equazione differenziale

$$p(r) + rp'(r) = \rho\omega^2 r^2 \,. \tag{4}$$

Se assumiamo che la temperatura sia pressocché costante al variare di r usando l'equazione dei gas perfetti possiamo calcolare la densità dell'aria come:

$$\rho(r) = \frac{p(r)}{RT}\,\mu \tag{5}$$

dove μ è la massa molare dell'aria e R la costante dei gas perfetti. Si ottiene pertanto un'equazione differenziale omogenea:

$$p(r) + rp'(r) = \frac{\mu\,\omega^2}{RT}\,r^2\,p(r)\,, \tag{6}$$

la cui soluzione è

$$p(r) = r_0 p_0\,\frac{e^{\frac{\mu(r^2-r_0^2)\omega^2}{2RT}}}{r}\,, \tag{7}$$

in termini della pressione p_0 misurata a un certo raggio r_0. Come si puó osservare c'è un raggio critico

$$\bar{r} \sim \sqrt{\frac{2RT}{\mu\omega^2}}\,, \tag{8}$$

tale per cui per $r > \bar{r}$ la pressione aumenta. Questo raggio in questo modello semplificato rappresenta la dimensione tipica della bassa pressione. Allontanandosi dalla bassa pressione la pressione aumenta in accordo con il fatto che l'aria segue un moto ciclonico attorno alle basse pressioni. La divergenza che otteniamo per $r \to 0$ e $r \to \infty$ è data dal fatto che l'approssimazione di velocità angolare costante non è più valida in questi limiti. È interessante che il nostro modello predice un raggio tipico per la dimensione delle basse pressioni dato da $\bar{r}$.

Problema 3.

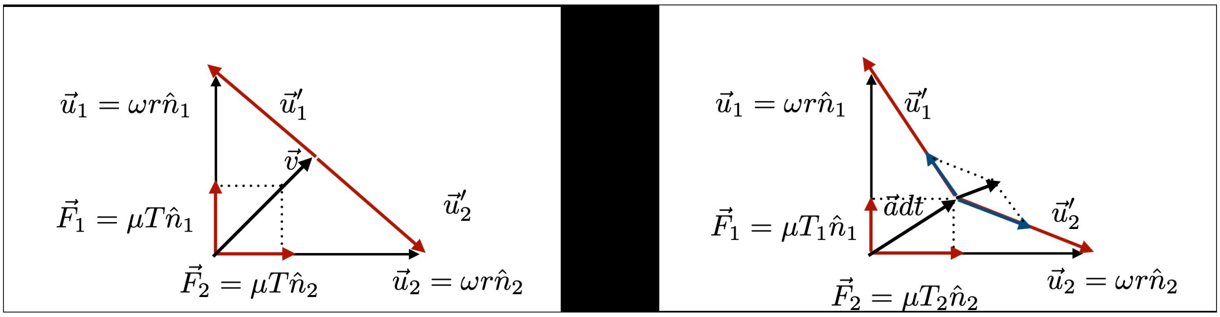


FIGURA 2. Soluzione grafica del problema data dalla condizione che le velocità relative del punto di contatto del rullo con il piano siano opposte

Le forze di attrito tra i rulli e i due piani sono uguali in modulo. La direzione delle forze di attrito sarà data dalla velocità relativa tra la superficie del rullo a contatto con il piano e il piano stesso. Per simmetria, visto che le forze di attrito sono uguali in modulo e all'istante iniziale ortogonali, il veicolo accelererà seguendo un angolo di 45° finché la velocità relative tra la superficie della parte di rullo a contatto con i due piani non saranno opposte tra di loro e pertanto la forza totale di attrito sarà nulla. Questo accade quando la velocità del veicolo è data (come descritto in figura) da:

$$v = \frac{r\omega}{\sqrt{2}}\,. \tag{9}$$

Se l'angolo tra i rulli è minore di $\pi/2$ con le forze di attrito sempre uguali semplicemente la direzione del veicolo sarà lungo la bisettrice tra le due forze di attrito. La velocità finale sarà sempre determinata dalla condizione che le due velocità relative siano opposte. Pertanto la soluzione in figura si applica allo stesso modo con un angolo tra le velocità u_1 e u_2 minore di $\pi/2$.

In presenza di gravità è possibile dare una soluzione qualitativa. Uno dei piani avrà una forza d'attrito maggiore causata dal peso del veicolo e pertanto il veicolo si muoverà lungo direzione data dalla somma vettoriale delle due forze. Adesso però in mancanza di simmetria il veicolo accelererà e dopo un tempo Δt i nuovi vettori forza avranno direzione lungo le differenze di velocitá tra i piani e i rulli. La velocità finale dovrà sempre soddisfare la condizione che le velocità relative siano opposte, però a causa della differenza di forze, il veicolo continuerà ad accelerare lungo la direzione del vettore $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ Per risolvere il caso generale in cui né le velocità relative iniziali né le forze non sono uguali è conveniente scrivere le equazioni del moto:

$$\dot{v}_x = -\frac{F_1}{m}\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + (u_1 - v_y)^2}} + \frac{F_2}{m}\frac{u_2 - v_x}{\sqrt{(u_2 - v_x)^2 + v_y^2}}\,, \tag{10}$$

$$\dot{v}_y = +\frac{F_1}{m}\frac{u_1 - v_y}{\sqrt{v_x^2 + (u_1 - v_y)^2}} - \frac{F_2}{m}\frac{v_y}{\sqrt{(u_2 - v_x)^2 + v_y^2}} \tag{11}$$

A partire da queste equazioni è possibile ricavare la seguene equazione per le velocità relative

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u_1'}{F_1} - \frac{u_2'}{F_2}\right] = \frac{(F_2 - F_1)(F_2 + F_1)}{F_1 F_2}\,. \tag{12}$$

Da cui si evince come la combinazione $\frac{u_1'}{F_1} - \frac{u_2'}{F_2}$ evolva linearmente nel tempo in accordo con il fatto che il veicolo accelera lungo la direzione in cui le velocità relative sono allineate. Interessante è la soluzione nel caso in cui $F_1 = F_2 = F$ per la quale la differenza $u_1' - u_2'$ è una costante del moto. Questa costante può essere ricavata all'istante iniziale:

$$\alpha = u_1 - u_2 \,. \tag{13}$$

Mentre

$$u_1^2 + u_2^2 = \beta^2 = (u_1' + u_2')^2 \,. \tag{14}$$

dove u_1 e u_2 sono ortogonali all'istante iniziale e u_1' e u_2' allineati all'istante finale. A questo punto possiamo risolvere trovando i moduli delle velocità relative finali:

$$u_1' = \frac{\beta + \alpha}{2} \,, \tag{15}$$

$$u_2' = \frac{\beta - \alpha}{2} \,. \tag{16}$$

Le componenti della velocità finale del veicolo sono date da una semplice proporzione:

$$v_x = \frac{u_1'}{\beta} u_2 \,, \tag{17}$$

$$v_y = \frac{u_2'}{\beta} u_1 \,. \tag{18}$$

Problema 4.
Visto dalla banchina il raggio di luce percorre l'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Detto t' il semiperiodo dell'orologio di luce nel suo riferimento in quiete e t il semiperiodo misurato dalla banchina, il cateto di base misurerà vt dove v è la velocità del treno rispetto alla banchina, mentre il cateto verticale è dato da ct'. L'ipotenusa ha invece una lunghezza ct. Usando il teorema di pitagora ricaviamo allora la relazione tra t' e t:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{19}$$

Questa relazione è la famosa dilatazione dei tempi per cui otteniamo

$$N = \frac{N'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \,, \tag{20}$$

con $N' < N$.

Problema 6.
La forza gravitazionale dipende dalla distanza come $1/r^2$. Usando i dati è chiaro che la forza gravitazionale terra-sole è più grande di quella terra-luna. L'andamento delle maree però è una differenza di forze e ha una dipendenza di tipo $1/r^3$. Questo spiega perché le maree seguono il ciclo lunare. In corrispondenza di luna nuova e piena le maree solari e lunari si sommano in modo concorde producendo quelle che vengono chiamate maree sigiziali.

SSM
Scuola Superiore Meridionale

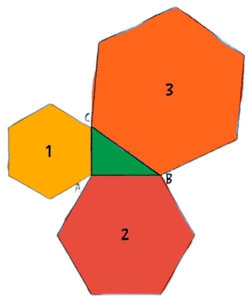
Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2023–2024

Prova di Matematica
(Corsi di Laurea in Fisica, Ingegneria e Matematica)
11 Settembre 2023

Non è consentita la consultazione di alcun libro o documento, né l'uso di alcun dispositivo, come per esempio, calcolatrici, cellulari, né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare un nome, una firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
La prova potrà essere consegnata solo dopo almeno un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1. Dato un triangolo rettangolo ABC, si costruiscano su ogni suo lato, dei poligoni convessi simili tra loro (come in figura). Si mostri che la somma delle aree dei due poligoni sui cateti è uguale all'area del poligono sull'ipotenusa.



Problema 2. Si trovino le soluzioni reali della seguente equazione:

$$9^x - 6^x = 4^x \,.$$

Problema 3. Siano $P_1, \ldots, P_9$ punti distinti nel piano cartesiano, a tre a tre non allineati, le cui coordinate siano numeri interi. Si dimostri che è sempre possibile scegliere tre di tali punti in modo che il baricentro del triangolo da essi formato abbia a sua volta coordinate intere.

Problema 4. Dato $n \in \mathbb{N}$, abbiamo un sacchetto con palline numerate da 1 a n. Si calcoli la probabilità che estraendo a caso tutte le palline una alla volta (senza rimetterle nel sacchetto, una volta estratte), si ottenga una sequenza di numeri che sia prima crescente per un po' e poi sempre decrescente.

Problema 5. Si provi che permutando le cifre di una potenza di 2, non si può ottenere un'altra diversa potenza di 2 (zero non è ammesso come cifra iniziale di un numero).

Problema 6. Si trovino, se esistono, le coppie di funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(g(x)) = x^2 \qquad \text{e} \qquad g(f(x)) = x^3 \,,$$

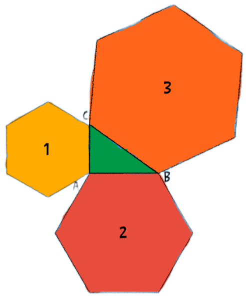
per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Scuola Superiore Meridionale

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2023–2024

Prova di Matematica – Soluzioni

Problema 1. Dato un triangolo rettangolo ABC, si costruiscano su ogni suo lato, dei poligoni convessi simili tra loro (come in figura). Si mostri che la somma delle aree dei due poligoni sui cateti è uguale all'area del poligono sull'ipotenusa.



Soluzione. Se due poligoni sono simili con rapporto di similitudine (tra le lunghezze) $\lambda > 0$, il rapporto tra le loro due aree è dato da λ^2. Se dunque P è il poligono costruito sull'ipotenusa e C_1, C_2 i due simili a P sui due cateti, con rapporti di similitudine λ_1, λ_2, rispettivamente, si deve avere che λ_1 è il rapporto tra il la lunghezza L_1 del primo cateto e quella I dell'ipotenusa del triangolo e analogamente λ_2 per il secondo cateto, di lunghezza L_2. La somma delle aree dei due poligoni sui cateti dunque soddisfa

$$\text{Area}(C_1) + \text{Area}(C_2) = \lambda_1^2 \text{Area}(P) + \lambda_2^2 \text{Area}(P) = \left[L_1^2/I^2 + L_2^2/I^2\right] \text{Area}(P) = \text{Area}(P),$$

dove il fatto che $L_1^2/I^2 + L_2^2/I^2 = 1$ segue dal teorema di Pitagora.

Problema 2. Si trovino le soluzioni reali della seguente equazione:

$$9^x - 6^x = 4^x\,.$$

Soluzione. Dividiamo entrambi i membri per 4^x, ottenendo

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x - \left(\frac{6}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1.$$

Ponendo dunque $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$ si ha $y^2 - y - 1 = 0$, che ha come unica soluzione positiva

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Segue che l'unica soluzione dell'equazione è data da

$$x = \log_{3/2} \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Problema 3. Siano $P_1, \ldots, P_9$ punti distinti nel piano cartesiano, a tre a tre non allineati, le cui coordinate siano numeri interi. Si dimostri che è sempre possibile scegliere tre di tali punti in modo che il baricentro del triangolo da essi formato abbia a sua volta coordinate intere.

Soluzione. Come prima osservazione, si noti che sia l'ipotesi che la tesi del problema non cambiano se si traslano tutti i punti (in verticale e/o in orizzontale) di una medesima lunghezza intera. In particolare, possiamo supporre che uno dei punti dati, diciamo P_1, sia l'origine del piano cartesiano (basta infatti traslare tutti i punti di una lunghezza in orizzontale/verticale pari all'opposto della ascissa/ordinata di P_1). Le coordinate del baricentro di un triangolo nel piano cartesiano con vertici di coordinate (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) sono date da

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right),$$

Questo suggerisce di considerare la divisione per 3 delle coordinate dei punti P_i. Scriviamo $P_i = (3a_i + r_i, 3b_i + s_i)$ dove a_i, b_i, r_i, s_i sono interi e r_i, s_i sono scelti nell'insieme $\{0, 1, -1\}$. Data una coppia (r, s) con $r, s \in \{0, 1, -1\}$, diciamo che il punto P_i *appartiene alla classe* (r, s) se le sue coordinate sono $(3a_i + r, 3b_i + s)$, o viceversa diciamo che la classe (r, s) *contiene* il punto P_i. Per esempio, il punto di coordinate $(176, 13)$ appartiene alla classe $(-1, 1)$, perch $(176, 13) = (3 \cdot 59 - 1, 3 \cdot 4 + 1)$ (potremmo esprimere lo stesso concetto dicendo che la classe $(-1, 1)$ contiene il punto $(176, 13)$).
Supponiamo per assurdo che non sia possibile formare un triangolo con baricentro a coordinate intere. Affermiamo che in tal caso ci sono al massimo 2 punti che appartengono ad ogni classe, se così non fosse e una classe (r, s) contenesse tre punti, a meno di rinumerare, diciamo che siano P_2, P_3, P_4 (ricordiamo che $P_1 = (0, 0)$), si avrebbe

$$P_2 = (3a_2 + r, 3b_1 + s)\,, \quad P_3 = (3a_3 + r, 3b_3 + s)\,, \quad P_4 = (3a_4 + r, 3b_4 + s)\,,$$

quindi il baricentro del triangolo $P_1P_2P_3$ ha coordinate

$$\left(\frac{3a_2 + 3a_3 + 3a_4 + 3r}{3}, \frac{3b_1 + 3b_2 + 3b_3 + 3s}{3}\right) = \Big(a_2 + a_3 + a_4 + r, b_1 + b_2 + b_3 + s\Big)\,,$$

cio ha coordinate intere, il che contraddice l'ipotesi per assurdo. Come conseguenza, avendo 9 punti, questi si distribuiscono su almeno 5 classi, una delle quali è $(0, 0)$.
Supponiamo un punto stia nella classe $(1, 1)$, allora la classe $(-1, -1)$ è vuota, altrimenti un punto in tale classe e i due punti nelle classi $(0, 0)$ e $(1, 1)$ formano un triangolo con baricentro di coordinate intere, come si vede facilmente usando la formula sopra. Dunque le altre (almeno) tre classi non vuote devono essere tra le sei con le due "coordinate" diverse tra loro. Se tra queste le classi $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ fossero vuote, si vede facilmente che almeno due tra le (almeno) tre classi non vuote devono avere una "coordinata" comune nulla, quindi i punti in queste due classi e il punto $(0, 0)$ formerebbero di nuovo un triangolo con baricentro di coordinate intere (sempre usando la formula sopra). Assumiamo allora che la classe $(-1, 1)$ sia non vuota, il che implica, ragionando come sopra, che la classe $(1, -1)$ deve essere vuota e che le (almeno) altre due classi non vuote devono essere tra le quattro $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Vediamo subito che la classe $(0, 1)$ deve essere vuota, altrimenti i punti nelle tre classi $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ formerebbero un triangolo con baricentro di coordinate intere, inoltre, per lo stesso motivo, le (almeno) altre due classi restanti non possono essere $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, dunque le due uniche possibilità sono le coppie di classi $\{(-1, 0), (0, -1)\}$ e $\{(1, 0), (0, -1)\}$. Nel primo caso, si formerebbe un triangolo con baricentro di coordinate intere col punto nella classe $(1, 1)$, nel secondo caso col punto nella classe $(-1, 1)$.
Se un punto sta in una delle altre tre classi con coordinate diverse da zero, come $(1, 1)$ che abbiamo preso ad esempio, con ragionamento analogo, si ha la stessa contraddizione, quindi deve essere che abbiamo esattamente quattro classi (oltre alla $(0, 0)$) non vuote: $(0, 1)$,

$(0,-1)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$. Segue che una terna di punti nelle tre classi $(0,1)$, $(0,0)$ e $(0,-1)$ forma un triangolo con baricentro di coordinate intere.
Si ha dunque sempre una contraddizione, da cui la conclusione del problema.

Problema 4. Dato $n \in \mathbb{N}$, abbiamo un sacchetto con palline numerate da 1 a n. Si calcoli la probabilità che estraendo a caso tutte le palline una alla volta (senza rimetterle nel sacchetto, una volta estratte), si ottenga una sequenza di numeri che sia prima crescente per un po' e poi sempre decrescente.

Soluzione. Se $n = 1$ o 2, non vi sono sequenze con le caratteristiche cercate, dunque la probabilità cercata è banalmente zero. Se $n > 2$, per la struttura del problema, tutte le sequenze di estrazione hanno la stessa probabilità di uscita e il loro numero è $n!$ Infatti, per ogni determinata sequenza di estrazione, la probabilità di estrarre esattamente il primo valore dagli n disponibili è $1/n$, la probabilità di estrarre il secondo dai rimanenti $n-1$ disponibili è $1/(n-1)$, etc... In generale, la probabilità di estrarre il k–simo valore della sequenza sarà $1/(n-k+1)$. La probabilità di estrarre l'intera sequenza è dunque

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n!}$$

Per avere quelle come nell'enunciato, deve essere che vengono inizialmente estratti dei numeri minori di n in sequenza crescente, poi ad un certo punto (prima dell'ultima estrazione) esce n e successivamente di nuovo dei numeri minori di n, in sequenza decrescente. Il cambio di monotonia (unico) deve infatti avvenire necessariamente al momento dell'estrazione di n. Se per assurdo avvenisse prima, allora il valore estratto prima di n dovrebbe essere maggiore di n (il che è impossibile), se invece avvenisse dopo, il valore estratto dopo n dovrebbe essere maggiore di n e si avrebbe una contraddizione. Supponiamo che n esca alla k–esima estrazione, con $1 < k < n$ e che A sia l'insieme dei $k-1$ numeri estratti prima e B quello degli $n-k$ numeri estratti dopo (chiaramente, conoscendo A, l'insieme B è univocamente determinato). Allora, fissato A c'è una sola possibile sequenza di estrazione crescente dei numeri che contiene, analogamente per B (decrescente) che come detto è determinato da A, quindi anche tale sequenza.
Dunque, le estrazioni "favorevoli", per ogni k fissato, sono in corrispondenza con i possibili sottoinsiemi di $k-1$ numeri in $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, cioè

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Sommando allora su $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, otteniamo il numero di estrazioni di sequenze "favorevoli", dato da

$$\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} - 2 = (1+1)^{n-1} - 2 = 2^{n-1} - 2\,,$$

per la formula del binomio di Newton.
Concludiamo quindi, poiché la probabilità è data dal rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili, che la risposta alla richiesta del problema è

$$\mathbb{P} = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{2^{n-1} - 2}{n!}\,.$$

Problema 5. Si provi che permutando le cifre di una potenza di 2, non si può ottenere un'altra diversa potenza di 2 (zero non è ammesso come cifra iniziale di un numero).

Soluzione. Supponiamo per assurdo che esista una potenza di 2 tale che una permutazione delle sue cifre (in cui zero non è cifra iniziale) sia ancora una potenza di 2 e indichiamo questi due numeri con n e m, con $m > n$. Allora, avendo i due numeri (che sono entrambi pari) lo stesso numero $k+1$ di cifre, m è 2, 4, o al massimo 8 volte n.
Se $m = 2n$ oppure $m = 8n$, poiché

$$n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$$

e

$$m = 10^k b_k + 10^{k-1} b_{k-1} + \cdots + 10b_1 + b_0,$$

segue che, indicata con S la somma delle cifre di m e n, si ha

$$0 \equiv m + n \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i + b_i = 2S \qquad (\mathrm{mod}\, 3)$$

quindi S è un multiplo di 3, ma ciò implica che anche n è multiplo di 3, il che è assurdo
Se invece $m = 4n$, segue che

$$0 \equiv m + 5n \equiv \sum_{i=1}^{n} 5a_n + b_n = 6S \qquad (\mathrm{mod}\, 9)$$

quindi n è ancora multiplo di 3, da cui una contraddizione anche in questo caso.

Problema 6. Si trovino, se esistono, le coppie di funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(g(x)) = x^2 \qquad \text{e} \qquad g(f(x)) = x^3\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Supponiamo che due tali funzioni esistano. Dalla seconda uguaglianza segue che f è iniettiva e g surgettiva, essendo x^3 bigettiva, inoltre, applicando f a entrambi i membri della seconda uguaglianza e sfruttando poi la prima, si ottiene

$$f(g(f(x))) = f(x^3) = [f(x)]^2\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ponendo $x = 0, 1, -1$, si ha

$$f(0) = [f(0)]^2, \qquad f(1) = [f(1)]^2 \qquad \text{e} \qquad f(-1) = [f(-1)]^2$$

dunque, i tre numeri $f(0)$, $f(1)$ e $f(-1)$ sono soluzioni dell'equazione $y = y^2$, cioè devono essere uguali a 0 o a 1. Segue che due di loro devono coincidere, in contraddizione con l'iniettività di f. Concludiamo che due tali funzioni non possono esistere.

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2024–2025

Prova di Fisica

(Corsi di Laurea in Fisica, Ingegneria e Matematica)

12 Settembre 2024

Non è consentita la consultazione di alcun libro o documento, né l'uso di alcun dispositivo, come per esempio, calcolatrici, cellulari, né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare un nome, una firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
La prova potrà essere consegnata solo dopo almeno un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1.
Una formica si muove tra due pareti separate da una distanza d che si avvicinano tra loro a una velocità relativa v. La formica si muove a una velocità $w > v$ rispetto al pavimento e parte da uno dei due muri muovendosi verso il secondo. Ogni volta che raggiunge uno dei due muri si gira e inizia a muoversi verso l'altro muro. Che distanza avrà percorso la formica prima di rimanere schiacciata tra i due muri?

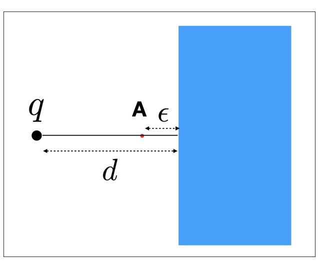


Figura 1. Piano infinito conduttore, la direzione z perpendicolare al foglio è soppressa nella figura.

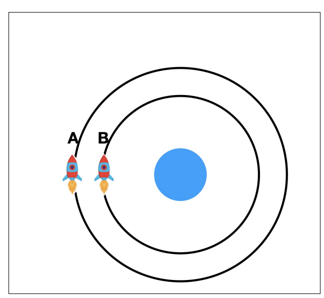


Figura 2. Razzi: la distanza tra i due razzi è trascurabile rispetto al raggio dell'orbita.

Problema 2.
Si consideri una carica q posta di fronte a un conduttore infinito come in figura 1. Si determini il valore del campo elettrico nel punto A in figura 1 nel limite in cui $\epsilon \to 0$. Si ricordi che un

conduttore ideale è un materiale le cui cariche si ridistribuiscono liberamente, sotto l'effetto di campi esterni, in modo tale che il campo elettrico al suo interno sia identicamente nullo. Inoltre, in un conduttore ideale le cariche possono solo accumularsi sulla sua superfice.

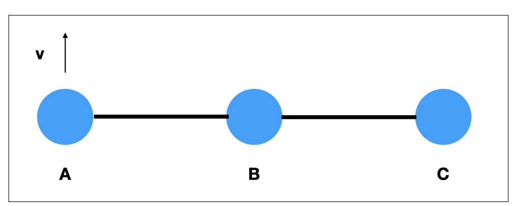
Problema 3. Due astronavi A e B si trovano in un'orbita circolare attorno alla terra, una a fianco all'altra, come in figura 2. Il pilota dell'astronave B vuole sorpassare l'astronave A. L'unica cosa che può fare è accendere il propulsore, posizionato parallelamente alla direzione del moto, modificando il modulo della velocità.

(1) In che verso l'astronave B deve accendere il propulsore per sorpassare l'astronave A, ritornando in un'orbita circolare attorno alla terra? (si trascuri ogni transiente e si assumano istantanei i cambi di velocità associati all'accensione del propulsore)
(2) La forza gravitazionale è conservativa? Quali sono le peculiarità di tali forze? Come influiscono sull'energia meccanica totale, sull'energia cinetica e sull'energia potenziale?

Problema 4.
Si schematizzi la camminata come l'esercizio fisico nel quale l'essere umano utilizza la minima energia per muoversi. Questo vuol dire che le gambe si possono schematizzare come pendoli fisici nel loro movimento tra un passo e il successivo, mossi solo dalla forza gravitazionale (trascurando gli attriti). Utilizzando questo modello fisico e supponendo che due uomini, uno di altezza L_1 e l'altro di altezza L_2, abbiano le stesse proporzioni corporee, si stimi come il rapporto tra le velocità dei due uomini $\frac{v_1}{v_2}$ dipende da L_1 e L_2. Il risultato è in accordo con il senso comune?

Problema 5. Una ciminiera ha una sezione A e un'altezza h. La temperatura dell'atmosfera è T_a mentre quella del fumo T_s con $T_s > T_a$. La stufa che usa la ciminiera per funzionare produce una quantità di gas di scarico Q per unità di tempo. Si determini l'altezza minima della ciminiera affinché funzioni in modo efficiente rilasciando tutti i gas prodotti dalla stufa nell'atmosfera. Si esprima il risultato come funzione di T_a, T_s, Q e della sezione della ciminiera A. Si assuma che: la velocità media delle molecole di gas nella stufa sia nulla. Che la densità del fumo ρ_f sia uguale a quella dell'aria ρ_a quando entrambi sono alla stessa temperatura. Che il fumo sia un gas ideale. Che la densità del gas sia costante all'interno della ciminiera. Che la pressione atmosferica abbia il seguente andamento con l'altezza $p(z) = p_0 - \rho_a g z$, dove p_0 è la pressione atmosferica ad altezza nulla.

Problema 6.
Tre sfere identiche A, B e C di massa m sono connesse da due aste di massa nulla e di lunghezza l come in figura. Una delle aste connette le sfere A e B e l'altra le sfere B e C. La connessione sulla sfera B è tale che l'angolo tra le due aste può variare senza alcun attrito. All'istante iniziale le sfere e le aste sono allineate e alla sfera A viene dato un colpo perpendicolare alle aste in modo che subito dopo acquisisca una velocità v perpendicolare alle aste. Trascurando ogni attrito, si trovi la distanza minima tra le sfere A e C durante il moto.



SSM
Scuola Superiore Meridionale

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2024–2025

Prova di Fisica – Soluzioni

Problema 1. Una formica si muove tra due pareti separate da una distanza d che si avvicinano tra loro a una velocità relativa v. La formica si muove a una velocità $w > v$ rispetto al pavimento e parte da uno dei due muri muovendosi verso il secondo. Ogni volta che raggiunge uno dei due muri si gira e inizia a muoversi verso l'altro muro. Che distanza avrà percorso la formica prima di rimanere schiacciata tra i due muri?

Soluzione. La formica si muove a velocità w per un tempo $t = \frac{d}{v}$. Pertanto percorre una distanza $L = \frac{wd}{v}$.

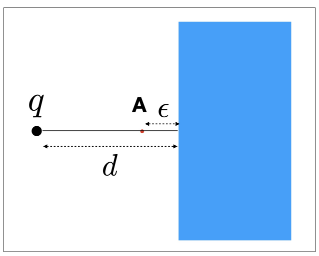


FIGURA 1. Piano infinito conduttore, la direzione z perpendicolare al foglio è soppressa nella figura.

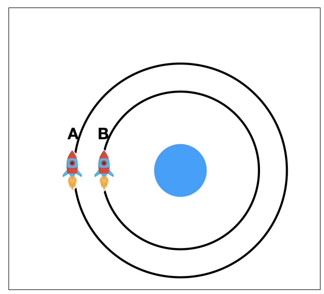


FIGURA 2. Razzi: la distanza tra i due razzi è trascurabile rispetto al raggio dell'orbita.

Problema 2. Si consideri una carica q posta di fronte a un conduttore infinito come in figura 1. Si determini il valore del campo elettrico nel punto A in figura 1 nel limite in cui $\epsilon \to 0$. Si ricordi che un conduttore ideale è un materiale le cui cariche si ridistribuiscono liberamente, sotto l'effetto di campi esterni, in modo tale che il campo elettrico al suo interno sia identicamente nullo. Inoltre, in un conduttore ideale le cariche possono solo accumularsi sulla sua superfice.

Soluzione. Le cariche del piano conduttore si ridistribuiscono sotto l'effetto del campo generato dalla carica esterna in modo tale da azzerare il campo elettrico all'interno del conduttore. Questo vuol dire che, se consideriamo il piano come uno specchio, nel punto riflesso di A (all'interno del conduttore) che chiameremo $A^{(r)}$ la somma del campo elettrico della carica q e del campo generato dalle cariche sul conduttore deve essere nulla (nel limite $\epsilon \to 0$) il campo elettrico del conduttore nel punto $A^{(r)}$ è pertanto dato da:

$$\vec{E}^{(c)}_{A^{(r)}} = -\frac{kq}{d^2}\hat{x}\,. \tag{1}$$

Il campo elettrico $\vec{E}^{(c)}_{A^{(r)}}$ può essere generato soltanto da una densità superficiale di carica. Per questo motivo $\vec{E}^{(c)}_{A}$ all'esterno del conduttore è dato dalla riflessione di $\vec{E}^{(c)}_{A^{(r)}}$ rispetto al piano conduttore (pertanto cambia segno):

$$\vec{E}^{(c)}_{A} = \frac{kq}{d^2}\hat{x}\,. \tag{2}$$

Usando il principio di sovrapposizione otteniamo infine che il campo elettrico nel punto A è dato dalla somma del campo generato dalla carica q e dal campo generato dal conduttore:

$$\vec{E}^{(c)}_{A} = 2\frac{kq}{d^2}\hat{x}\,. \tag{3}$$

Semplicemente il doppio del campo della sola carica q.

Problema 3. Due astronavi A e B si trovano in un'orbita circolare attorno alla terra, una a fianco all'altra, come in figura 2. Il pilota dell'astronave B vuole sorpassare l'astronave A. L'unica cosa che può fare è accendere il propulsore, posizionato parallelamente alla direzione del moto, modificando il modulo della velocità.

(1) In che verso l'astronave B deve accendere il propulsore per sorpassare l'astronave A, ritornando in un'orbita circolare attorno alla terra? (si trascuri ogni transiente e si assumano istantanei i cambi di velocità associati all'accensione del propulsore)
(2) La forza gravitazionale è conservativa? Quali sono le peculiarità di tali forze? Come influiscono sull'energia meccanica totale, sull'energia cinetica e sull'energia potenziale?

Soluzione. Per superare l'astronave A, l'astronave B deve ridurre il periodo di rotazione attorno alla terra. Per la terza legge di Keplero il periodo di rotazione è dato da

$$T^2 = Ka^3 \tag{4}$$

dove K è una costante e a è il semiasse maggiore dell'orbita genericamente ellittica nel nostro caso. Questo vuol dire che per poter effettuare il sorpasso l'astronave B deve ridurre il suo semiasse maggiore, e pertanto deve frenare arrivando a una velocità $v < \sqrt{\frac{GM}{r}}$, rimanendo istantaneamente a una distanza r dalla terra. In questo modo percorrerà un'orbita ellittica il cui punto di partenza è l'afelio e che è inscritta nell'orbita circolare iniziale. Dopo aver atteso un intero periodo lungo questa orbita ellittica che passa più vicino alla terra, quando si trova di nuovo all'afelio può infine riaccelerare istantaneamente alla velocità $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ in modo da ritornare nell'orbita circolare iniziale avendo superato l'astronave A. Questo problema mostra come in presenza di gravità per sorpassare un'astronave sia necessario frenare invece che accelerare all'opposto di come suggerirebbe il senso comune. Se invece l'astronave B aumentasse la sua velocità e andasse su un'orbita ellittica con semiasse maggiore $a > r$, incrementerebbe il periodo di rotazione invece di ridurlo, e pertanto verrebbe sorpassata dall'astronave A dopo essere tornata sull'orbita circolare.

Problema 4. Si schematizzi la camminata come l'esercizio fisico nel quale l'essere umano utilizza la minima energia per muoversi. Questo vuol dire che le gambe si possono schematizzare come pendoli fisici nel loro movimento tra un passo e il successivo, mossi solo dalla forza gravitazionale (trascurando gli attriti). Utilizzando questo modello fisico e supponendo che due uomini, uno di altezza L_1 e l'altro di altezza L_2, abbiano le stesse proporzioni corporee, si stimi come il rapporto tra le velocità dei due uomini $\frac{v_1}{v_2}$ dipende da L_1 e L_2. Il risultato è in accordo con il senso comune?

Soluzione. Usiamo l'analisi dimensionale per eseguire la stima. In particolare il periodo di oscillazione delle gambe di un uomo di altezza L deve dipendere da L (unica scala di lunghezza in gioco) come

$$T \sim \sqrt{\frac{L}{g}} \tag{5}$$

L'ampiezza dell'oscillazione sarà proporzionale a L e la velocità si può stimare come

$$v \sim \frac{L}{T} \sim \sqrt{Lg} \tag{6}$$

il tutto a meno di fattori numerici adimensionali. Concludiamo che

$$\frac{v_1}{v_2} \sim \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}, \tag{7}$$

spiegando perché persone più alte camminano mediamente più veloce di persone più basse. Si noti che non abbiamo dovuto usare alcuna approssimazione di piccole oscillazioni per ottenere questo risultato.

Problema 5. Una ciminiera ha una sezione A e un'altezza h. La temperatura dell'atmosfera è T_a mentre quella del fumo T_s con $T_s > T_a$. La stufa che usa la ciminiera per funzionare produce una quantità di gas di scarico Q per unità di tempo. Si determini l'altezza minima della ciminiera affinché funzioni in modo efficiente rilasciando tutti i gas prodotti dalla stufa nell'atmosfera. Si esprima il risultato come funzione di T_a, T_s, Q e della sezione della ciminiera A. Si assuma che: la velocità media delle molecole di gas nella stufa sia nulla. Che la densità del fumo ρ_f sia uguale a quella dell'aria ρ_a quando entrambi sono alla stessa temperatura. Che il fumo sia un gas ideale. Che la densità del gas sia costante all'interno della ciminiera. Che la pressione atmosferica abbia il seguente andamento con l'altezza $p(z) = p_0 - \rho_a g z$, dove p_0 è la pressione atmosferica ad altezza nulla.

Soluzione.

Il flusso d'aria all'interno della ciminiera può essere descritto dall'equazione di Bernoulli sotto l'assunzione che la densità del fumo sia costante.

Possiamo pertanto scrivere che

$$\frac{1}{2}\rho_f v_f(h)^2 + p_f(h) + \rho_f g h = p_f(0) \tag{8}$$

dove il pedice f si riferisce al fumo e dove abbiamo assunto che nella stufa la velocità media delle molecole sia nulla. Affinché il fumo fuoriesca $p_f(h) \geq p_a(h)$. Per trovare la minima altezza della ciminiera possiamo supporre l'uguaglianza ottenendo

$$\frac{1}{2}\rho_f v_f(h)^2 + p(h) + \rho_f g h = p(0) \tag{9}$$

dove abbiamo usato che il fumo è prodotto alla pressione $p(0)$ essendo la fornace in equilibrio con l'aria.

Risolvendo per $v_f(h)$ otteniamo

$$v(h) = \sqrt{2gh\left(\frac{\rho_a}{\rho_f} - 1\right)}\,. \tag{10}$$

Il fumo che fuoriesce per unità di tempo è allora

$$v(h)A \geq Q \tag{11}$$

affinché la ciminiera sia efficiente. Otteniamo pertanto che

$$h \geq \frac{1}{2g}\frac{Q^2}{A^2}\frac{1}{\frac{\rho_a}{\rho_f} - 1} \tag{12}$$

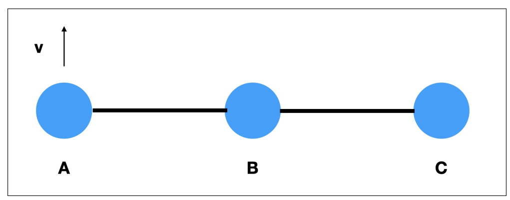
Usando che $\rho_f = \rho_a$ alla stessa temperatura, per un gas perfetto si ha che $\frac{\rho_a}{\rho_f} \sim \frac{T_f}{T_a}$. Da cui segue che

$$h \geq \frac{1}{2g}\frac{Q^2}{A^2}\frac{T_a}{T_f - T_a}\,, \tag{13}$$

che è la relazione cercata.

Problema 6.

Tre sfere identiche A, B e C di massa m sono connesse da due aste di massa nulla e di lunghezza l come in figura. Una delle aste connette le sfere A e B e l'altra le sfere B e C. La connessione sulla sfera B è tale che l'angolo tra le due aste può variare senza alcun attrito. All'istante iniziale le sfere e le aste sono allineate e alla sfera A viene dato un colpo perpendicolare alle aste in modo che subito dopo acquisisca una velocità v perpendicolare alle aste. Trascurando ogni attrito, si trovi la distanza minima tra le sfere A e C durante il moto.



Soluzione.
Per $t > 0$ si conserva l'energia, la quantità di moto e il momento angolare rispetto al centro di massa.
Inoltre

$$v_{cm} = \frac{v}{3}\,. \tag{14}$$

pertanto nel riferimento del c.m. subito dopo $t = 0$.

$$v_A = \frac{2}{3}v\,, \qquad v_B = v_C = -\frac{1}{3}v\,. \tag{15}$$

Da qui segue che il momento angolare nel c.m. è dato da

$$L = ml\frac{2v}{3} - m(-l)\frac{v}{3} = mvl \tag{16}$$

e

$$E = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{mv^2}{3}\,. \tag{17}$$

Detto ϕ l'angolo descritto dai due bracci nel punto B si ha che quando la distanza AC è minima l'angolo ϕ è stazionario e possiamo in quell'istante schematizzare il sistema come un corpo rigido il cui momento di inierzia si può ottenere risolvendo

$$E = \frac{L^2}{2I} \tag{18}$$

da cui

$$I = \frac{3}{2}ml^2 \tag{19}$$

La distanza minima $d = AC$ si determina trovando quale triangolo isoscele con masse m ai vertici ha lo stesso momento di inerzia $I = \frac{3}{2}ml^2$.
Il momento di inerzia di un triangolo con ai vertici tre sfere è dato dal prodotto delle tre masse moltiplicate dal quadrato delle distanze dei vertici dal baricentro del triangolo. Per un triangolo di lati a, b e c, la lunghezza m_a della mediane che divide il lato a si può calcolare usando la legge del parallelogramma applicata al parallelogrammo di lati b e c e diagonale a, da cui segue che

$$a^2 + (2m_a)^2 = 2b^2 + 2c^2 \tag{20}$$

con m_a la lunghezza della mediana. Risolvendo per m_a abbiamo che

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \tag{21}$$

Usando questa relazione e chiamando D il baricentro del nostro triangolo isoscele di lati $AB = l$, $BC = l$ e $AC = d$ si ottiene che

$$BD = \frac{2}{3}\sqrt{l^2 - \frac{d^2}{4}}\,, \tag{22}$$

$$AD = CD = \frac{1}{3}\sqrt{2(l^2 + d^2) - l^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2d^2 - l^2} \tag{23}$$

Pertanto

$$I(d) = m(BD^2 + AD^2 + CD^2) = m\left[\frac{4}{9}\left(l^2 - \frac{d^2}{4}\right) + \frac{2}{9}\left(2d^2 + l^2\right)\right] = \frac{m}{3}(2l^2 + d^2) \tag{24}$$

Infine risolvendo per d a partire da

$$\frac{3}{2}ml^2 = I(d) = \frac{m}{3}(2l^2 + d^2) \tag{25}$$

otteniamo quello che cercavamo, ossia la distanza minima

$$d = \sqrt{\frac{5}{2}}\,l > l\,. \tag{26}$$

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2024–2025

Prova di Matematica

(Corsi di Laurea in Fisica, Ingegneria e Matematica)

11 Settembre 2024

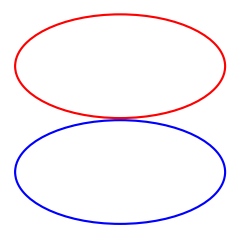
Non è consentita la consultazione di alcun libro o documento, né l'uso di alcun dispositivo, come per esempio, calcolatrici, cellulari, né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare un nome, una firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
La prova potrà essere consegnata solo dopo almeno un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1. Si trovino tutte le soluzioni intere positive della seguente equazione:

$$a^2 + b^2 + 4b = 96\,.$$

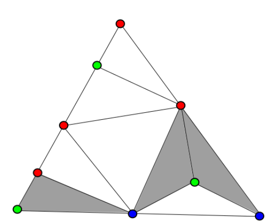
Problema 2. Si considerino due ellissi uguali e tangenti, posizionate come nella figura a destra. Si descriva (giustificando la risposta) il luogo dei punti del piano percorsi dai fuochi dell'ellisse rossa, rotolando senza strisciare sull'ellisse blu (che rimane ferma).



Problema 3. Si mostri che ogni radice $\alpha \in \mathbb{R}$ del polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, soddisfa

$$|\alpha| \leqslant \max\{|a|+1, |b|+1, |c|+1\}\,.$$

Problema 4. Consideriamo un triangolo T diviso in triangolini e coloriamo tutti i vertici di tali triangolini in tre colori, come per esempio nella figura a destra. Supponendo che i tre vertici di T abbiano tre colori diversi e che su ognuno dei suoi lati non ci possano essere vertici di tutti e tre i colori, si mostri che esiste almeno un triangolino con vertici di tre colori diversi.



Problema 5. Si calcoli la probabilità che lanciando 7 volte un dado da gioco a 6 facce (non truccato) "escano" almeno due numeri uguali uno immediatamente dopo l'altro (per esempio, come nelle sequenze di lanci 1233443 o 5151555, ma non in 6262323).

Problema 6. Si trovino (se esistono) tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $f(1) = 1$.

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario

A.A. 2024–2025

Prova di Matematica – Soluzioni

Problema 1. Si trovino le soluzioni intere positive della seguente equazione:

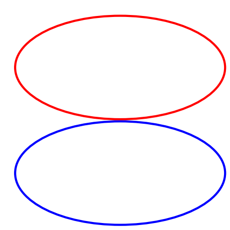
$$a^2 + b^2 + 4b = 96\,.$$

Soluzione. Sommando 4 a entrambi i membri dell'equazione si ottiene

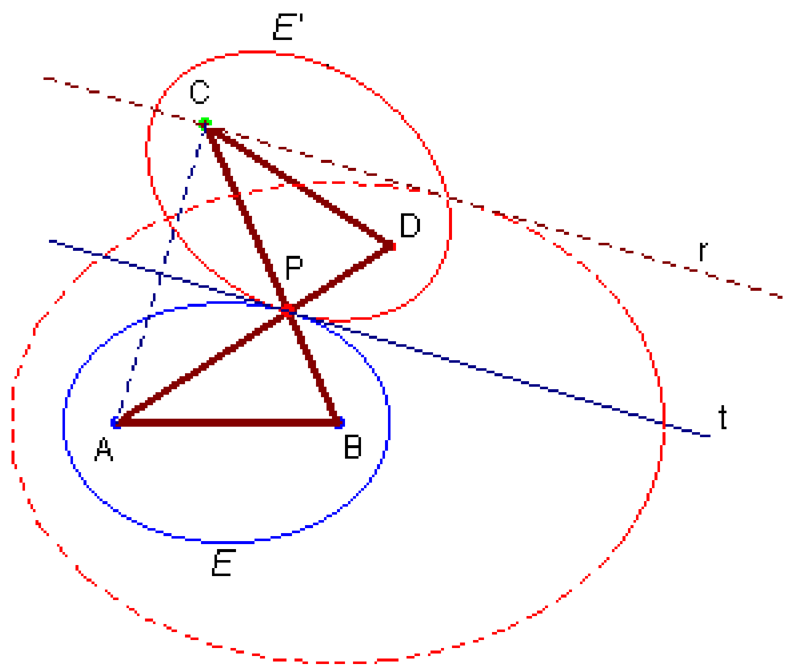
$$a^2 + b^2 + 4b + 4 = a^2 + (b+2)^2 = 100\,,$$

dunque la somma dei due quadrati di numeri interi positivi a^2 e $(b+2)^2$ è uguale a 100. Poiché 100 è somma di due quadrati in un unico modo: $100 = 6^2 + 8^2$, le uniche possibili soluzioni sono $a = 6$e $b + 2 = 8$, oppure $a = 8$ e $b + 2 = 6$, cioè $a = b = 6$ oppure $a = 8$ e $b = 4$.

Problema 2. Si considerino due ellissi uguali e tangenti, posizionate come nella figura a destra. Si descriva (giustificando la risposta) il luogo dei punti del piano percorsi dai fuochi dell'ellisse rossa, rotolando senza strisciare sull'ellisse blu (che rimane ferma).



Soluzione. Facendo riferimento alla figura sotto, si ha che se t è la retta tangente comune alle due ellissi nel punto di contatto, per le proprietà (dei fuochi A, B e C, D, rispettivamente) dell'ellisse, i punti B, P, C sono allineati. Essendo per simmetria, $PC = PA$, si ha allora $BC = PB + PC = PB + PA$ che è costante (proprietà definitoria dell'ellisse). Segue che il fuoco C dell'ellisse rossa, mentre questa rotola, percorre una circonferenza centrata nel fuoco B dell'ellisse blu. Analogamente, l'altro fuoco D percorre una circonferenza centrata nel fuoco A.



Si veda anche https://www.geogebra.org/m/xqqpm7kv.

Problema 3. Si mostri che ogni radice $\alpha \in \mathbb{R}$ del polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, soddisfa

$$|\alpha| \leqslant \max\{|a| + 1, |b| + 1, |c| + 1\}\,.$$

Soluzione. Sia $M = \max\{|a|, |b|, |c|\}$ e assumiamo per assurdo che $|\alpha| > M+1 \geqslant 1$. Essendo α una radice di $p(x)$, si deve avere

$$0 = p(\alpha) = \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^3 = -a\alpha^2 - b\alpha - c$$

e dividendo entrambi i membri per α^2

$$\alpha = -a - \frac{b}{\alpha} - \frac{c}{\alpha^2}.$$

Prendendo i moduli di entrambi i membri di questa equazione, per le proprietà del valore assoluto, si ha

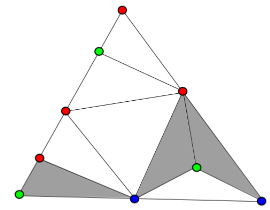
$$|\alpha| = \left| -a - \frac{b}{\alpha} - \frac{c}{\alpha^2} \right| \leqslant |a| + \frac{|b|}{|\alpha|} + \frac{|c|}{|\alpha|^2} \leqslant M + \frac{M}{|\alpha|} + \frac{M}{|\alpha|^2}.$$

Dunque, poiché abbiamo assunto che $|\alpha| > M + 1$,

$$|\alpha| \leqslant M + \frac{M}{M+1} + \frac{M}{(M+1)^2} = \frac{M(M+1)^2 + M(M+1) + 1}{(M+1)^2} = \frac{(M+1)^3}{(M+1)^2} = M + 1,$$

che è chiaramente in contraddizione con tale assunzione, da cui la tesi del problema.

Problema 4. Consideriamo un triangolo T diviso in triangolini e coloriamo tutti i vertici di tali triangolini in tre colori, come per esempio nella figura a destra. Supponendo che i tre vertici di T abbiano tre colori diversi e che su ognuno dei suoi lati non ci possano essere vertici di tutti e tre i colori, si mostri che esiste almeno un triangolino con vertici di tre colori diversi.



Soluzione. Immaginiamo che i triangolini siano le stanze di una casa, i lati dei triangolini le pareti di tali stanze e ci siano delle porte su tutti e soli i lati i cui vertici che li "bordano" hanno due colori diversi. Osserviamo allora che se per assurdo non esistesse alctriangolino con vertici di tre colori diversi, una volta "entrati" in una stanza, c'è esattamente un'altra porta per uscire. Entriamo dunque nella casa da una porta sul bordo di T e poi proseguiamo di stanza in stanza (di triangolino in triangolino), uscendo ogni volta dalla "seconda porta" di ogni stanza (diversa da quella da cui siamo entrati), per l'osservazione sopra. Dato che i triangolini sono finiti e non si può rientrare in un triangolino (stanza) dove si è già passati (altrimenti ci sarebbe un loop del percorso, che implicherebbe tre porte in una stanza oppure di "entrare–uscire" dalla stessa porta in una stanza, che non è previsto) prima o poi si prende una porta sul bordo di T che ci fa "uscire" dalla casa e quest'ultima è diversa da quella iniziale, per quanto detto sopra. Ripetendo questa operazione per tutte le porte sul bordo di T, otteniamo un accoppiamento biunivoco tra di esse dato dall'essere le porte di "entrata–uscita da T" di tutti i nostri possibili percorsi all'interno della casa. Concludiamo quindi che le porte sul bordo di T sono in numero pari.
Se però consideriamo l'ipotesi che su ognuno dei lati di T ci sono solo vertici dei due colori (diversi) ai vertici di tale lato, segue facilmente (per esempio per induzione sul numero dei vertici sul lato) che su ogni lato di T c'è un numero dispari di porte ed essendo tre i lati, il numero totale di porte sul bordo di T è dispari.
Questa contraddizione implica la tesi del problema.

Problema 5. Si calcoli la probabilità che lanciando 7 volte un dado da gioco a 6 facce (non truccato) "escano" almeno due numeri uguali uno immediatamente dopo l'altro (per esempio, come nelle sequenze di lanci 1233443 o 5151555, ma non in 6262323).

Soluzione. La probabilità cercata è data da 1 meno la probabilità che nei 7 lanci non accada mai che "escano" due numeri consecutivi uguali, calcoliamo dunque quest'ultima, determinando i casi favorevoli e dividendo poi per i casi possibili che sono 6^7. Fatto il primo lancio (6 casi), per essere tra i casi favorevoli, il secondo lancio ha solo 5 possibilità, date dal non ripetere la prima "uscita". Il terzo lancio ci farà restare tra i casi favorevoli se e solo se non ripeterà la seconda uscita (5 possibilità) e così via. In conclusione, i casi favorevoli saranno $6 \cdot 5^6$. Dunque, la probabilità di una sequenza di lanci senza due numeri consecutivi uguali è data da

$$\mathbb{P} = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{6 \cdot 5^6}{6^7} = \left(\frac{5}{6}\right)^6,$$

il che implica che la probabilità che invece "escano" almeno due numeri uguali uno immediatamente dopo l'altro è

$$1 - \mathbb{P} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6.$$

Problema 6. Si trovino (se esistono) tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$$
per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $f(1) = 1$.

Soluzione. Ponendo $x = 1$ e tenendo presente che $f(1) = 1$, si ha
$$f(y + f(1)) = f(y) + f(1) \qquad \Longrightarrow \qquad f(y+1) = f(y) + 1,$$
per ogni $y \in \mathbb{R}$. In particolare, se $y = 0$, si ottiene $1 = f(1) = f(0) + 1$, da cui $f(0) = 0$.
Ponendo $y = 0$, si ha
$$f(f(x)) = xf(0) + f(x) = f(x),$$
per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Se ora $y \neq 0$ e $x = 1/y$, abbiamo
$$f(1 + f(1/y)) = f(y)/y + f(1/y)$$
ed essendo
$$f(1 + f(1/y)) = f(f(1/y)) + 1 = f(1/y) + 1,$$
per quanto visto sopra, concludiamo
$$f(1/y) + 1 = f(y)/y + f(1/y) \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = f(y)/y,$$
da cui segue che dev'essere $f(y) = y$, per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Scuola Superiore Meridionale

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2025–2026

Prova di Matematica
(Corsi di Laurea in Fisica, Ingegneria e Matematica)
10 Settembre 2025

Non è consentita la consultazione di alcun libro o documento, né l'uso di alcun dispositivo, come per esempio, calcolatrici, cellulari, né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare un nome, una firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
La prova potrà essere consegnata solo dopo almeno un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1. Si trovino tutte le cinquine di numeri interi nonnegativi a, b, c, d, n tali che

$$n^a + n^b + n^c = n^d\,,$$

con $n \geqslant 1$.

Problema 2. Su un foglio a quadretti è disegnata la pianta di una casa rettangolare di lati 10 e 20, con i suoi bordi e i muri interni che stanno solo sui lati dei quadretti del foglio, che hanno lunghezza 1. Si provi che se la lunghezza totale dei muri "interni" alla casa è maggiore di 171 allora la casa ha due "ambienti" non "comunicanti tra loro", cioè tali che da uno non si può "raggiungere" l'altro.

Problema 3. Si trovino tutte le terne di numeri interi positivi x, y, z tali che

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3\,.$$

Problema 4. Sui lati di un triangolo ABC si costruiscano (verso l'esterno) tre triangoli equilateri con le basi coincidenti con i lati di ABC. Siano DEF i vertici "mancanti" di tali triangoli equilateri. Si dimostri che ABC e DEF hanno lo stesso baricentro.

Problema 5. Si mostri che se abbiamo 9 punti nello spazio a coordinate intere, c'è almeno una coppia di punti tale che le coordinate del punto medio del segmento che li unisce siano anch'esse intere.

Problema 6. Si trovino (se esistono) tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x + yf(x)) = xy + f(x)\,,$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario

A.A. 2025–2026

Prova di Matematica – Soluzioni

Problema 1. Si trovino tutte le cinquine di numeri interi nonnegativi a, b, c, d, n tali che

$$n^a + n^b + n^c = n^d\,,$$

con $n \geqslant 1$.

Soluzione. Notiamo che chiaramente dev'essere $n > 1$ e $d > a, b, c \geqslant 0$, dunque possiamo supporre che $a \leqslant b \leqslant c < d$. Dividendo entrambi i membri dell'equazione per n^a, otteniamo

$$1 + n^{b-a} + n^{c-a} = n^{d-a}\,.$$

Se $b > a$, considerando i resti della divisione di entrambi i membri per n^{b-a}, otteniamo 1 per il membro sinistro e zero per quello destro, dunque una contraddizione, da cui si deve avere che $b = a$ e

$$1 + 1 + n^{c-a} = n^{d-a}\,.$$

Con lo stesso argomento, se $n > 2$, concludiamo che anche $c = a$, dunque

$$3n^a = n^a + n^b + n^c = n^d\,,$$

da cui segue facilmente che $n = 3$, $a = b = c$ e $d = a+1$ e queste sono tutte e sole le possibili cinquine (al variare di $a \in \mathbb{N}$) che soddisfano l'uguaglianza, se $n > 2$.
Nell'ultimo caso rimasto, $n = 2$, si deve avere $b = a$ e

$$2 + 2^{c-a} = 1 + 1 + 2^{c-a} = 2^{d-a}\,,$$

che si vede chiaramente avere solo le soluzioni $c - a = 1$ e $d - a = 2$.
Riassumendo, si hanno come soluzioni tutte e sole le cinquine $(a, a, a, a+1, 3)$ e $(a, a, a+1, a+2, 2)$, con $a \in \mathbb{N}$.

Problema 2. Su un foglio a quadretti è disegnata la pianta di una casa rettangolare di lati 10 e 20, con i suoi bordi e i muri interni che stanno solo sui lati dei quadretti del foglio, che hanno lunghezza 1.
Si provi che se la lunghezza totale dei muri "interni" alla casa è maggiore di 171 allora la casa ha due "ambienti" non "comunicanti tra loro", cioè tali che da uno non si può "raggiungere" l'altro.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che la lunghezza totale dei muri "interni" sia maggiore di 171 e che non ci siano due "ambienti" non comunicanti tra loro.
Consideriamo l'insieme complessivo dei muri "interni" e dividiamolo in pezzi connessi che non si toccano fra loro. Ognuno di questi pezzi è un *albero* (nel senso dei grafi, non ha cioè circuiti chiusi) altrimenti ci sarebbero due "ambienti" separati.
Consideriamo due tipi di pezzi connessi: quelli che toccano i bordi del rettangolo e quelli che non li toccano.

Se uno di questi pezzi tocca il bordo del rettangolo, si vede facilmente che non lo può toccare una seconda volta altrimenti abbiamo due "ambienti" separati, inoltre, con un facile ragionamento induttivo, si vede che seguendo lo sviluppo del muro, si coprono tanti punti del reticolo interni al quadrato quanti la lunghezza complessiva del pezzo di muro.
Se invece un pezzo di muro è tutto "interno", cioè non tocca mai il bordo del rettangolo, partendo da un suo punto "terminale" (che ci deve essere essendo un albero e quindi non possedendo circuiti chiusi) e ragionando come prima si vede che in questo caso si coprono tanti punti del reticolo interno quanti la lunghezza complessiva del pezzo di muro più uno.
Essendo tutti questi pezzi di muro disgiunti tra loro, si conclude che il numero totale di punti interni coperti deve essere maggiore o uguale alla lunghezza totale dei muri "interni". Visto che i punti interni sono solo 171, abbiamo una contraddizione.

Problema 3. Si trovino tutte le terne di numeri interi positivi x, y, z tali che

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3.$$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione come

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) = 1 = \sqrt[3]{\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x}}$$

dove il termine a sinistra è la media aritmetica di $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$ e il termine a destra la media geometrica degli stessi numeri. Dato che media aritmetica e geometrica coincidono, si deve avere

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}\,,$$

che possiamo riscrivere come

$$xz = y^2 \qquad xy = z^2\,.$$

Risolvendo dunque in x le due equazioni e confrontando le soluzioni abbiamo

$$\frac{y^2}{z} = \frac{z^2}{y} \quad\iff\quad y^3 = z^3 \quad\iff\quad y = z\,.$$

Sostituendo l'uguaglianza $y = z$ in una delle due equazioni sopra, otteniamo $x = y = z$.

Problema 4. Sui lati di un triangolo ABC si costruiscano (verso l'esterno) tre triangoli equilateri con le basi coincidenti con i lati di ABC. Siano DEF i vertici "mancanti" di tali triangoli equilateri. Si dimostri che ABC e DEF hanno lo stesso baricentro.

Soluzione. Siano $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ e $\overrightarrow{C}$ i tre vettori nel piano che rappresentano i vertici del triangolo ABC. Allora si ha

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{D} &= \overrightarrow{B} + R_{60^\circ}(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{B} + R_{60^\circ}(\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B})\\
\overrightarrow{E} &= \overrightarrow{C} + R_{60^\circ}(\overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{C} + R_{60^\circ}(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C})\\
\overrightarrow{F} &= \overrightarrow{A} + R_{60^\circ}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A} + R_{60^\circ}(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A})
\end{aligned}$$

dove R_{60° denota l'operazione (lineare) di rotazione di 60 gradi in senso orario.
Segue che

$$\begin{aligned}\overrightarrow{D}+\overrightarrow{E}+\overrightarrow{F} &= \overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}+\overrightarrow{A}+R_{60^\circ}(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B})+R_{60^\circ}(\overrightarrow{A}-\overrightarrow{C})+R_{60^\circ}(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A})\\ &= \overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}+\overrightarrow{A}+R_{60^\circ}\left[(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B})+(\overrightarrow{A}-\overrightarrow{C})+(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A})\right]\\ &= \overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}+\overrightarrow{A}\,.\end{aligned}$$

Dividendo per 3, otteniamo

$$\frac{\overrightarrow{D}+\overrightarrow{E}+\overrightarrow{F}}{3}=\frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{3}\,.$$

Poiché il punto $\frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{3}$ è il baricentro di ABC, mentre $\frac{\overrightarrow{D}+\overrightarrow{E}+\overrightarrow{F}}{3}$ è il baricentro di DEF, i due baricentri coincidono.

Problema 5. Si mostri che se abbiamo 9 punti nello spazio a coordinate intere, c'è almeno una coppia di punti tale che le coordinate del punto medio del segmento che li unisce siano anch'esse intere.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che affinché due punti $A=(x_A,y_A,z_A)$ e $B=(x_B,y_B,z_B)$ a coordinate intere abbiamo il punto medio del segmento che li unisce a coordinate intere, le coordinate devono avere a due a due la stessa parità. A ogni punto dello spazio, associamo allora una terna le cui componenti sono 0 e 1 in corrispondenza, rispettivamente, di coordinate pari e dispari. Ad esempio al punto $(1,3,4)$ associamo la terna $(1,1,0)$, dato che le prime due coordinate sono dispari e la terza è pari. Per quanto detto sopra, affinché due punti a coordinate intere abbiano punto medio a coordinate intere devono essere associati alla stessa terna. Il numero di terne possibili è il numero di disposizioni con ripetizioni di 2 oggetti (che sarebbero 0 e 1) in 3 posti (ossia le 3 coordinate): abbiamo quindi $2^3=8$ terne possibili. Per il principio dei cassetti, se abbiamo 9 punti che devono essere associati a 8 possibili terne, allora almeno 2 saranno associati alla stessa terna: questi due punti hanno il punto medio del segmento che li unisce con coordinate intere.

Problema 6. Si trovino (se esistono) tutte le funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tali che

$$f(x+yf(x))=xy+f(x)\,,$$

per ogni $x,y\in\mathbb{R}$.

Soluzione. Ponendo $x=1$ nell'equazione, si ha

$$f(1+yf(1))=y+f(1)\,,$$

per ogni $y\in\mathbb{R}$, che implica che f è surgettiva. Dunque esistono $a,b\in\mathbb{R}$ tali che $f(a)=0$ e $f(b)=1$.
Ponendo $x=a$, si ottiene

$$0=f(a)=f(a+yf(a))=ay+f(a)=ay\,,$$

per ogni $y\in\mathbb{R}$, da cui segue che dev'essere $a=0$, cioè $f(0)=0$.
Ponendo $x=b$, abbiamo

$$f(b+y)=f(b+yf(b))=by+f(b)=by+1\,,$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$ e, se poniamo $y = z - b$, otteniamo

$$f(z) = f(b + (z - b)) = b(z - b) + 1 = bz - b^2 + 1\,,$$

per ogni $z \in \mathbb{R}$, in particolare, se $z = 0$,

$$0 = f(0) = -b^2 + 1\,,$$

da cui $b = 1$ oppure $b = -1$. Dunque, abbiamo le due sole funzioni $f(z) = z$ e $f(z) = -z$, per ogni $z \in \mathbb{R}$ (che si vede entrambe soddisfano l'equazione).

Scuola Superiore Meridionale

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2025–2026

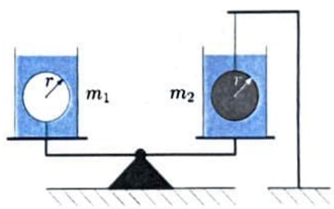
Prova di Fisica
(Corsi di Laurea in Fisica, Ingegneria e Matematica)
11 Settembre 2025

Non è consentita la consultazione di alcun libro o documento, né l'uso di alcun dispositivo, come per esempio, calcolatrici, cellulari, né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare un nome, una firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
La prova potrà essere consegnata solo dopo almeno un'ora dall'inizio della stessa.

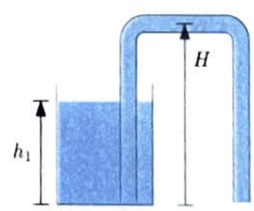
Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1. Un treno si muove a una velocità $v = 30$ m/s verso la stazione. Se il macchinista del treno suona il clacson per $T = 3$ s, per quanto tempo il clacson sarà sentito dalle persone in stazione? La velocità del suono è circa $v_s = 330$ m/s.

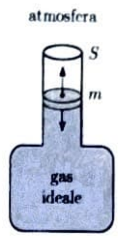
Problema 2. Si consideri una bilancia con due contenitori identici d'acqua come in figura. Nel contenitore di sinistra è immersa una pallina da ping-pong di raggio r e massa m_1 collegata al fondo del contenitore da un filo inestensibile a massa nulla. Nel contenitore di destra è immersa una pallina di ferro dello stesso raggio r e massa m_2 collegata a un supporto esterno tramite un altro filo inestensibile a massa nulla. Da che lato penderà la bilancia? Se invece di una pallina da ping-pong si usasse una pallina di un altro materiale, è possibile far pendere la bilancia dall'altro lato?



Problema 3. Si vuole costruire un sistema di tubature che riesca a portare l'acqua a un'altezza H da un bacino di altezza h_1 senza l'ausilio di pompe, come in figura. Si consideri che il tubo sia già riempito d'acqua nella sua interezza e che non vi siano attriti. Si assuma inoltre che la sezione del tubo sia molto più piccola della sezione del bacino. Sotto quali condizioni è possibile? Esiste un valore massimo per H?

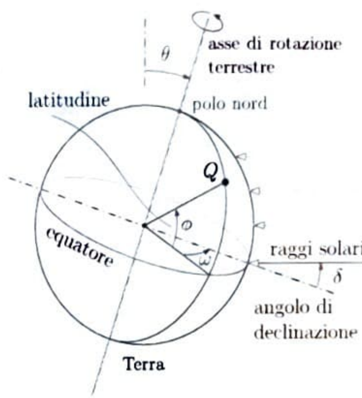


Problema 4. Un gas ideale è racchiuso in un recipiente che termina con un tubo di sezione S, chiuso da un disco di massa m e sezione S che può scorrere senza attrito come in figura. Partendo dalla posizione di equilibrio, dove il gas occupa il volume V_0, il disco viene leggermente traslato verticalmente e incomincia ad oscillare con periodo T. Assumendo che non vi siano scambi di calore tra il gas, il disco e l'ambiente esterno, si dimostri che, note le condizioni di equilibrio del sistema, una misura del periodo di oscillazione T permette di determinare il coefficiente di dilatazione adiabatica del gas $\gamma = c_p/c_V$. Si consideri l'approssimazione $(1+a)^{-\gamma} \approx 1 - \gamma a$ per $a \ll 1$.



Problema 5. È ben noto che la durata del giorno non è costante durante il corso dell'anno e varia con la latitudine ϕ. Si ricorda che l'asse tereste forma un angolo θ con la direzione normale al piano dell'orbita della Terra intorno al Sole, e che che la declinazione δ è definita come l'angolo fra i raggi del Sole e il piano dell'equatore. Si ricorda inoltre che la declinazione è minima nel solstizio di inverno ($\delta = -\theta$) ed è massima nel solstizio d'estate ($\delta = \theta$).

(1) Si calcoli la declinazione δ in funzione dell'angolo α che descrive la posizione della Terra nella sua orbita attorno al Sole ($\alpha = 0$ al solstizio d'inverno).
(2) Si calcoli la durata del giorno in ore in funzione della latitudine durante i solstizi.



Problema 6. È noto che il campo magnetico in un punto P generato da un filo infinito, coincidente con l'asse z e percorso da una corrente I, è dato dalla legge $\vec{B} = (\mu_0 I)/(2\pi r)\hat{t}$, dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto e $\hat{t}$ è il versore tangenziale come in figura. Invece il campo elettrico generato in un punto P da una distribuzione di carica lineare infinita, coincidente con l'asse z e con densità lineare λ, è dato da $\vec{E} = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r)\hat{r}$, dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto e $\hat{r}$ è il versore radiale.

(1) Si determini come cambia il campo elettrico nel punto P sotto una riflessione del sistema fisico rispetto ai piani xy e xz. Si ricorda che, ad esempio, la riflessione rispetto al piano xy corrisponde alla trasformazione della coordinata z in $-z$.
(2) Si determini come cambia il campo magnetico nel punto P sotto una riflessione del sistema fisico rispetto ai piani xy e xz. Si confrontino le proprietà di riflessione del campo magnetico con quelle del campo elettrico discusse nel punto precedente.
(3) Si consideri un solenoide infinito. Assumendo come unica ipotesi le proprietà di trasformazione del campo magnetico sotto le riflessioni derivate nel punto precedente, si dimostri che il campo magnetico deve essere parallelo all'asse del solenoide.